Funkcje analityczne

Wykład 2. Płaszczyzna zespolona

Paweł Mleczko

Funkcje analityczne (rok akademicki 2018/2019)

Plan wykładu

W czasie wykładu omawiać będziemy
- różne reprezentacje płaszczyzny zespolonej
- podstawowe funkcje związane z płaszczyzną zespoloną (sprzężenie, moduł)
- elementarne zastosowanie funkcji zespolonych
- uzwarcenie $\mathbb{C}$, czyli sferę Riemanna

1. Płaszczyzna zespolona

Liczby zespolone jako zbiór

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

Jeśli $z = x + iy$, to
- x nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby z (czasmi pisać będziemy $\operatorname{Re} z$)
- y nazywamy *częścią urojoną* liczby z (czasmi pisać będziemy $\operatorname{Im} z$)

Liczby zespolone jako ciało (struktura algebraiczna)

$$(\mathbb{C}, +, \cdot)$$

gdzie

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &= (x_1 + x_1) + i(y_1 + y_2)\\ (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).\end{aligned}$$

Działania spełniają „dobre” własności, tzn. zarówno dodawanie, jak i mnożenie jest
- łączne
- przemienne
- istnieją elementy neutralne działań
- istnieją elementy odpowiednio przeciwny oraz odwrotny (dla niezerowej liczby)

Ponadto mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Liczby zespolone jako przestrzeń liniowa

$\mathbb{C}$ jest przestrzenią liniową (bo jest *ciałem* – elementarny przykład przestrzeni liniowej).

O liczbach zespolonych można również myśleć jako przestrzeni liniowej nad $\mathbb{R}$. Wówczas $\mathbb{C}$ jest przestrzenią liniową dwuwymiarową.

Więcej o przestrzeniach liniowych w: A. Sołtysiak *Algebra liniowa* Poznań 2003.

Liczby zespolone jako macierze

Zbiór macierzy postaci

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

z działaniem dodawania i mnożenia macierzy jest izomorficzny z $\mathbb{C}$.

Sprzężenie

Sprzężeniem liczby zespolonej $z = x + iy$ nazywamy liczbę $\overline{z} = x - iy$.

Własności:

- $\overline{\overline{z}} = z$ (sprzężenie jest inwolutywne)
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (sprzężenie jest addytywne)
- $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (sprzężenie jest multiplikatywne)

Moduł

Funkcja $|\cdot|\colon \mathbb{C} \to [0, \infty)$ dana wzorem

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

nazywana jest *modułem* liczby zespolonej.

Własności:

- $z\overline{z} = |z|^2$
- $|zw| = |z|\,|w|$
- $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ (nierówność trójkąta)

Liczby zespolone jako przestrzeń metryczna

Funkcja $d\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to [0, \infty)$ dana wzorem

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

jest odległością w $\mathbb{C}$.

Postać trygonometryczna

$$\mathbb{C} = \{(r, t) : r \in [0, \infty),\ t \in [0, 2\pi)\}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos t_1 + i \sin t_1) \\ z_2 &= r_2(\cos t_2 + i \sin t_2) \qquad r_1, r_2 \in [0, \infty),\ t_i, t_2 \in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

Dodawanie liczb

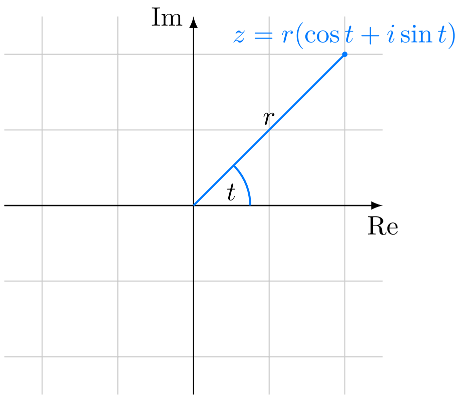
$$z_1 + z_2 = r_1 \cos t_1 + r_2 \cos t_2 + i(r_1 \sin t_1 + r_2 \sin t_2)$$

Mnożenie liczb

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\big(\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2)\big)$$

Mnożąc liczby zespolone należy dodać ich moduły.

Postać trygonometryczna



Zastosowanie w matematyce elementarnej

Zadanie 2. Uzasadnić wzór na sumę kosinusów dwóch kątów:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ciało $\mathbb{C}$ jest algebraicznie domknięte

Twierdzenie 1 (Zasadnicze twierdzenie algebry)**.** *Każdy wielomian zespolony stopnia n*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, \qquad a_i \in \mathbb{C},\ i = 0, 1, \ldots, n$$

ma pierwiastek, tzn. istnieje taka liczba z_0, że

$$a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + \cdots + a_n z_0^n = 0.$$

Wzór de Moivre'a

Jeśli $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, to

$$z^n = |z|^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$$

Dowód indukcyjnie!

Pierwiastki liczb zespolonych

Liczba w jest *pierwiastkiem* stopnia n z liczby zespolonej z, jeśli

$$w^n = z.$$

Pierwiastek nie jest wyznaczony jednoznacznie!

Dokładniej, jeśli $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, to

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\Big), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Pierwiastki rozmieszczone są na okręgu o promieniu $\sqrt[n]{r}$ w punktach będących wierzchołkami n-kąta foremnego.

Granica ciągów liczb zespolonych

Twierdzenie 2. *Ciąg $\{z_n = x_n + iy_n\} \subset \mathbb{C}$ jest zbieżny do granicy $z_0 = x + iy \in \mathbb{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Szeregi liczb zespolonych

Niech $\{z_n\}$ będzie ciągiem liczb zespolonych. Ciąg

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} z_k$$

nazywamy ciągiem sum częściowych. Jeśli ciąg $\{s_n\}$ jest zbieżny, to jego granice nazywamy szeregiem i oznaczamy symbolem

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

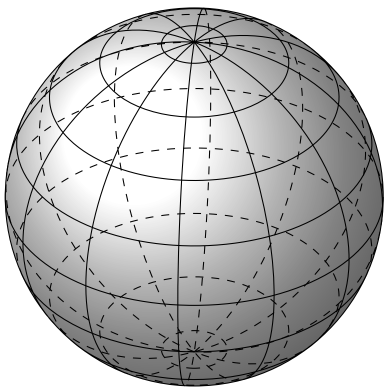
Szereg nazywamy bezwzględnie zbieżnym, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Twierdzenie 3. *Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny do liczby z wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są szeregi oraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} x \quad \textit{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z.$$

2. Sfera Riemanna

Sfera dwuwymiarowa



Domknięta płaszczyzna zespolona

Płaszczyznę $\mathbb{C}$ można utożsamić ze sferą $\mathbb{S}^2 \setminus N$ bez jednego punktu. To utożsamienie może być realizowane np. przez funkcję $S\colon \mathbb{C} \to \mathbb{S}^2 \setminus N$ (nazywaną rzutem stereograficznym) daną wzorem

$$S(x+iy) = (\xi, \eta, \tau) \qquad z = x + iy \in \mathbb{C}$$

gdzie

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2} \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2} \quad \tau = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}.$$

Przekształcenie odwrotne $S^{-1}\colon \mathbb{S}^2 \setminus N \to \mathbb{C}$

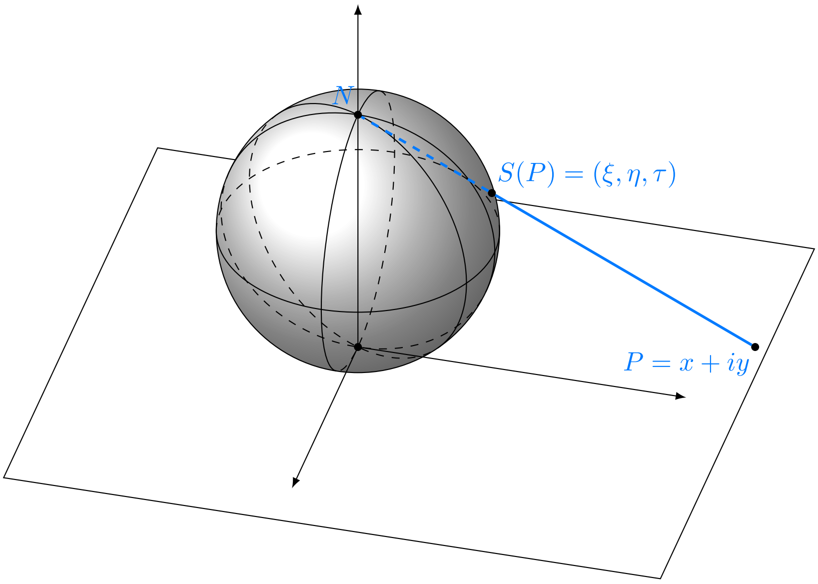
$$S^{-1}(\xi, \eta, \tau) = x + iy \qquad (\xi, \eta, \tau) \in \mathbb{S}^2 \setminus N$$

dane jest za pomocą wzoru

$$x = \frac{\xi}{1-\tau} \quad y = \frac{\eta}{1-\tau}.$$

Jeśli przyjmiemy, że obrazem w rzucie stereograficznym punktu ∞ jest punkt N, to wówczas sferę można utożsamić z $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Rzut stereograficzny



Topologia w $\overline{\mathbb{C}}$

Odwzorowanie $S\colon \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}^2$ pozwala na określenie topologii w $\overline{\mathbb{C}}$. Zbiór $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ jest otwarty, jeśli otwarty jest zbiór $S(A) \subset \mathbb{S}^2$.

W szczególności $\overline{\mathbb{C}}$ jest zbiorem zwartym.

Zbiór $\overline{\mathbb{C}}$ nazywamy *sferą Riemanna*. Jest ona przykładem zwartej rozmaitości zespolonej.

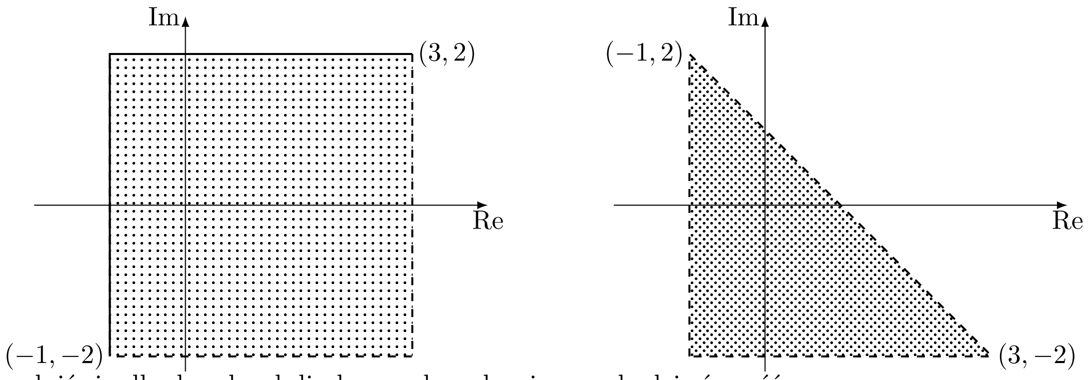
Podsumowanie wykładu

Po wykładzie wiedzieć należy:

- jak można interpretować liczby zespolone
- jak liczyć sprzężenie, moduł, potęgę i pierwiastki liczb zespolonych
- jak stosować liczby zespolone do dowodzenie tożsamości trygonometrycznych

3. Zadania do samodzielnego wykonania

1. Stwierdzić kiedy kwadrat liczby zespolonej jest liczbą
   - rzeczywistą,
   - ujemną,
   - tylko urojoną?
2. Doprowadzić do postaci $a + ib$ liczby zespolone
   - $(1 - 13i)/(1 - 3i)$,
   - $\sqrt{-5 - 12i}$,
   - $\frac{\left(\overline{1+2i}\right)^2}{3i-4}$.
3. Narysować zbiór tych punktów płaszczyzny zespolonej, które spełniają warunek:
   - $\left\{z \in \mathbb{C} : 1 < \mathrm{Re}(z) < 2\right\}$,
   - $\left\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - i| = \sqrt{2}\right\}$,
   - $\left\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - 2i| = \mathrm{Re}(z) + 1\right\}$,
   - $\left\{z \in \mathbb{C} : z = \overline{z}\right\}$.
4. Za pomocą liczb zespolonych opisać poniższe zbiory



5. Uzasadnić, że dla dowolnych liczb zespolonych z i w, zachodzi równość

$$w\overline{z} + \overline{w}z = 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})$$

6. Uzasadnić, że ciało $\mathbb{C}$ jest izomorficzne ze zbiorem macierzy postaci

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia.

7. Obliczyć

$$(-\sqrt{3} + i)^{32}.$$

8. Obliczyć granicę ciągu liczb zespolonych
   - $\lim_{n\to\infty}(4n + n^2 i)/(5n^2 - 2i)$,
   - $\lim_{n\to\infty}(4 + 2n^2 + 5in)/(1 - 4n + n^2 - in^2)$,
   - $\lim_{n\to\infty}((2 - i)/3)^n$
9. Zbadaj zbieżność szeregów
   - $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+i}{4}\right)^n$,
   - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$,
   - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2+i}$.