

Zadanie 1. Zapisać, używając symboli $\sum$ i $\prod$, następujące wyrażenia

- (a) $n!$;
- (b) $\sin(1) + \sin(1)\sin(2) + \dots + \sin(1)\sin(2)\dots\sin(N)$;
- (c) $(1+1)(1+1/2)(1+1/2+1/3)\dots(1+1/2+1/3+\dots+1/R)$.

Zadanie 2. Obliczyć

- (a) $\sum_{n=1}^N (2+3n)$;
- (b) $\sum_{n=1}^M (n+1) - \sum_{k=2}^{M-1} k$;
- (c) $\sum_{k=1}^N (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$;
- (d) $\sum_{l=1}^n s^l$.

Zadanie 3. Które z następujących własności są prawdziwe?

- (a) $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_{n-i}$;
- (b) $\sum_{j=1}^n b_i = nb_i$.

Zadanie 4. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n wyrażenie $n^3 - n$ jest podzielne przez 6. (Rozwiązać zadanie na dwa sposoby: korzystając z zasady indukcji matematycznej oraz jakimś innym sposobem).

Zadanie 5. Dla jakich liczb naturalnych prawdziwa jest nierówność

$$6n + 6 < 2^n?$$

Zadanie 6. Spróbować udowodnić, że

- (a) $\sum_{i=1}^n i = n^2$;
- (b) dla dowolnej liczby naturalnej $5n + 1$ jest podzielne przez 5.

Zadanie 7. Stosując indukcję matematyczną wykazać, że

- (a) $\sum_{i=1}^n i = n^2$;
- (b) $\sum_{k=1}^n k \cdot (k+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$;
- (c) $n! > 2^n$ dla $n > 3$;
- (d) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n}$.

Zadanie 8. Udowodnij, stosując zasadę indukcji matematycznej, że liczba $11^n + (-24)^n + 3$ dzieli się przez 10 dla każdego n naturalnego.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie D.1. Zapisać za pomocą symboli $\sum$ i $\prod$ następujące wyrażenia

- (a) suma liczb naturalnych mniejsza lub równa od $n \in \mathbb{N}$;
- (b) $x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \dots + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{1}x + 1$.

Zadanie D.2. Zapisać, używając symboli $\sum$ i $\prod$, następujące wyrażenia $d(n)$ (liczba dzielników liczby naturalnej n).

Zadanie D.3. Które z następujących własności są prawdziwe?

- (a) $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}$;
- (b) $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2j} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} a_{2k+1}$;
- (c) $\sum_{l=1}^n b_l = \sum_{l=3}^{n+2} b_{l-2}$;
- (d) $\sum_{h=0}^m (a_h + b_h) = \sum_{j=0}^m a_j + \sum_{g=0}^m b_g$.

Zadanie D.4. Dla jakich liczb naturalnych prawdziwa jest nierówność

$$3n^2 + 3n + 1 < 2^n?$$

Zadanie D.5. Dla jakich liczb naturalnych prawdziwa jest nierówność

$$n^3 < 2^n?$$

Zadanie D.6. Stosując indukcję matematyczną wykazać, że

- (a) $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
- (b) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$;
- (c) $2^{n+1} > 5n$ dla $n \geq 3$;
- (d) wielomian $x^n - nx^{n-1} + n - 1$ jest podzielny przez $x - 1$ (w jaki inny sposób można rozwiązać to zadanie?);
- (e) $\sum_{i=0}^n a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą $\neq 1$;
- (f) $3^n > n^2 + 4$ dla $n \geq 2$;
- (g) $\sum_{k=1}^n 4k - 3 = n(2n - 1)$;
- (h) $\sum_{p=1}^n (2p)^3 = 2n^2(n+1)^2$;
- (i) $\sum_{s=1}^m s \cdot (s+1)^2 = \frac{m(m+1)(m+2)(3m+5)}{12}$.

Zadanie D.7. Dany jest ciąg $\{a_n\}$ określony wzorem: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 2a_n - 3n + 4$. Udowodnij, że $a_n = 2^n + 3n - 1$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie D.8. Udowodnić, że dla ciągu określonego rekurencyjnie

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n}{n+1}, \quad n > 1$$

zachodzi wzór

$$a_n = \frac{3^n}{n!}, \quad n \geq 1.$$

Zadanie D.9. Uzasadnić (korzystając z zasady indukcji matematycznej), że

- (a) $3^{4n+2} + 1$ jest podzielne przez 10;
- (b) $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ jest podzielne przez 7;
- (c) $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ jest podzielna przez 11.

Zadanie D.10. Niech ciąg $\{f_n\}$ dany będzie wzorem:

$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1}, \quad f_0 = 0, \quad f_1 = 1.$$

Ciąg $\{f_n\}$ nazywa się *ciągami Fibonacciego*. Uzasadnić, że

- (a) $\sum_{k=0}^n f_k = f_{n+2} - 1$;
 (b) $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$.

Zadanie D.11. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem Fibonacciego określonym w zadaniu D.10. Uzasadnić, że

- (a) $\sum_{k=0}^n f_k^2 = f_n f_{n+1}$;
 (b) $\sum_{k=0}^n f_{2k+1} = f_{2n+2}$;
 (c) $\sum_{k=0}^n f_{2k} = f_{2n+1} - 1$.

Z powyższych równości wyciągnąć wnioski, że

$$\sum_{k=0}^n f_k = f_{n+2} - 1.$$

Zadanie 1. Znajdź pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta β , wiedząc, że

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{5}.$$

Zadanie 2. Wyznacz kąt α wiedząc, że

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{3}{4}, \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Zadanie 3. Oblicz

(a) $\sin \frac{19\pi}{6}$.

(b) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$.

(c) $\cos\left(-\frac{35\pi}{6}\right) + \sin \frac{29\pi}{6}$.

Zadanie 4. Rozwiąż równania:

(a) $|\sin x| + \sin x = 0$;

(b) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 1$;

(c) $2 \sin^4 x + 3 \sin^2 x + 1 = 0$;

(d) $\sin 2x - 2 \sin x = 0$.

Zadanie 5. Sprawdź tożsamości trygonometryczne

(a) $\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{1}{\cos 2x} - \operatorname{tg} 2x$;

(b) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2 \operatorname{tg} 2x$.

Zadanie 6. Uzasadnij, że wyrażenie

$$-\frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

nie jest tożsamością.

Zadanie 7. Wyprowadź wzory na $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ ze wzorów na sinus i cosinus sumy kątów.

Zadanie 8. Rozwiąż nierówności trygonometryczne

(a) $\cos x + \operatorname{tg} x \leq 1 + \sin x$;

(b) $|\sin x| \sin x \leq \frac{1}{2}$.

Zadanie 9. Wyznacz zbiór wartości funkcji f danej wzorem $f(x) = 4 \sin^2 x - 4 \sin x + 5$.

Zadanie 10. Naszkicuj wykres funkcji

$$f(x) = \sqrt{2}(\sin x + \cos x).$$

Zadanie 11. Dane jest równanie z niewiadomą x :

$$x^2 \cos \alpha + 2x \sin \alpha = \cos \alpha.$$

Wykaż, że jeśli α jest kątem ostrym, to równanie ma dwa rozwiązania. Znajdź te wartości parametru α , dla których dane równanie ma dwa rozwiązania takie, że suma ich odwrotności jest większa od 2.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie D.1. Oblicz

(a) $\sin^2 75^\circ - \cos^2 75^\circ$.

(b) $8 \sin \frac{2\pi}{3} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{3}$.

Zadanie D.2. Rozwiąż równania:

(a) $\operatorname{tg} x = \sin x$;

(b) $\sin^x + \cos x = 1$;

(c) $\sin x \cos x + \tan x = 2,5 \sin x$.

Zadanie D.3. Sprawdź tożsamości trygonometryczne

(a) $\sin^2 \left(\frac{7\pi}{2} - x \right) + \frac{1 - \cos x}{2} - \sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$;

(b) $\sin 7x \operatorname{tg} 3,5x + \cos 7x = 1$.

Zadanie D.4. Rozwiąż nierówności trygonometryczne

(a) $8 \sin^3 x - 4 \sin^2 x - 2 \sin x + 1 > 0$;

(b) $\sin x > \cos x$.

Zadanie D.5. Niech

$$A = \left\{ x \in [0, 4\pi]; \sin x > \frac{1}{2} \right\}, \quad B = \left\{ x \in [0, 1]; \cos x < -\frac{1}{2} \right\}.$$

Wyznacz $A \cap B$.**Zadanie D.6.** Naskicuj wykres funkcji

(a) $\cos x - \sqrt{3} \sin x$;

(b) $f(x) = (\cos x) \sqrt{|\cos x| - 1}$.

Zadanie D.7. Zbadaj dla jakich parametrów m istnieje rozwiązanie równania

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = m.$$

Zadanie 1. Omów podstawowe własności funkcji wykładniczej (dziedzina, zbiór wartości, monotoniczność, miejsca zerowe).

Zadanie 2. Rozwiąż następujące równości i nierówności

- (a) $(\sqrt{3})^{x^3-3} = \frac{1}{9}$;
- (b) $3 \cdot 5^x - 25^{x-1} = 5^{x+1} - \frac{12}{5}$;
- (c) $2^{\cos 2x} = 2^{\cos^2 x} - 2^{-1}$;
- (d) $(\frac{8}{9})^{8x^2-9} \geq (\frac{9}{8})^{9x^2-8}$;
- (e) $7^{-x} - 3 \cdot 7^{x+1} > 4$;
- (f) $2^{x+1} - 2^{x-1} \leq 3^{2-x}$.

Zadanie 3. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = 25^x - 10 \cdot 5^x + 9$.

Zadanie 4. Omów podstawowe własności funkcji logarytmicznej (dziedzina, zbiór wartości, monotoniczność, miejsca zerowe).

Zadanie 5. Oblicz

- (a) $\log_2 4 \sqrt[3]{16}$;
- (b) $9^{\log_3 5}$;
- (c) $\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9$.

Zadanie 6. Oblicz $\log ab$ wiedząc, że $\log 10a = 2010$ i $\log \frac{10}{b} = 1020$.

Zadanie 7. Sporządź wykresy funkcji

- (a) $-\log_2 x + 1$
- (b) $\log_3 |x - 1|$

Zadanie 8. Czym się różni wykres funkcji $y = \log x^4$ od wykresu funkcji $y = 4 \log x$?

Zadanie 9. Rozwiąż następujące równości i nierówności

- (a) $\log_x 3\sqrt{3} = \frac{1}{2}$;
- (b) $9^{\log_3(p-3)} = 4$;
- (c) $\ln(5x - e) = 1$;
- (d) $x^{\log 7} + 7^{\log x} = 98$;
- (e) $\log_{\frac{1}{3}}(\log_5 x) \geq 0$.

Zadanie 10. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste a spełniające równanie

$$\log_{1-2a}(a+7) = 2.$$

Zadanie 11. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór

$$\{(x, y) : \log_x y = 2\}.$$

Zadanie 12. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \log_{\sqrt{2}}(8x - x^2)$.

Zadanie 13. Dla jakiej wartości x poniższy ciąg jest ciągiem arytmetycznym?

$$\log 2, \log(2^x - 2), \log(2^x + 10)$$

Zadanie 14. Dla jakich wartości parametrów a i b dziedziną funkcji

$$f(x) = \log(-x^2 + ax + b)$$

jest przedział $(-3, 4)$? Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie D.1. Rozwiąż następujące równości i nierówności

- (a) $4^{\frac{1}{2}x-1} = 2^{3(x+1)}$;
- (b) $(0, 125)^x \cdot (\sqrt{2})^{x+1} = \left(\frac{4}{\sqrt[3]{2}}\right)^{3x}$;
- (c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-3|} \leq \frac{1}{9}$;
- (d) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x-2}{2x+3} = -2$;
- (e) $8^{\log_2 x} - 2x^2 \geq x - 2$;
- (f) $\log_3 \operatorname{tg} x < \frac{1}{2}, \quad x \in [-\pi, \pi]$.

Zadanie D.2. Oblicz

- (a) $\log_{0,1} 100 + \log_{\sqrt{5}} 125$;
- (b) $16^{\frac{1}{2} - \log_4 5} + 10^{3 \log 2 + 1}$.

Zadanie D.3. Rozwiąż równanie

$$\log_5 (\log_4 (\log_2 x)) = 0.$$

Zadanie D.4. Naszkicuj wykres funkcji $f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = (\sqrt{2})^{x+|x|}.$$

Zadanie D.5. Naszkicuj wykres i podaj zbiór wartości funkcji

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 5x + 6) - \log_{\frac{1}{2}} (x - 3).$$

Zadanie D.6. Sporządź wykresy funkcji

- (a) $\frac{\log_2 x^2}{|\log_2 x|}$;
- (b) $\log_{\frac{1}{2}} (2 - x)$.

Zadanie D.7. Liczby x_1 i x_2 są różnymi rozwiązaniami równania $mx^2 - mx + 2 = 0$. Dla jakich wartości m spełniona jest równość $\log_2 x_1 + \log_2 x_2 > -3$?

Zadanie D.8. Dane jest równanie $x^2 + 2x + 1 + \log m = 0$. Funkcja $f(x) = x_1 \cdot x_2$ określona jest na zbiorze tych m , dla których dane równanie ma różne pierwiastki x_1 i x_2 . Wyznacz dziedzinę funkcji f i określ zbiór jej wartości.

Zadanie 1. Rozwiąż równanie:

$$|2x - 4| - 3 = ||x - 2| - 1|.$$

Zadanie 2. Rozwiąż nierówność:

$$|4x| + 2 \geq |2x + 4| + |x - 3|.$$

Zadanie 3. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} 2(x + 5) - 3(y + 3) = 2(x + y) \\ 2x - 5(3 + y) = 4(2x + 8) \end{cases} \\ \text{(b)} \quad & \begin{cases} \frac{3x-2y}{3} + 4 = 3x \\ \frac{2,5x-2y}{2} - 2x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Zadanie 4. Rozwiąż układ równań i przeprowadź dyskusję istnienia i liczby rozwiązań w zależności od parametru:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} 3x - ay = 1 \\ 2x + 3ay = 19 \end{cases} \\ \text{(b)} \quad & \begin{cases} ax + y = a \\ x + ay = a^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Zadanie 5. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} |x| + 2|y| = 3 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \\ \text{(b)} \quad & \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x^2 - 4x + (y - 1)(y - 3) = -1 \end{cases} \\ \text{(c)} \quad & \begin{cases} -x + 3y = 3 \\ (|x| - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Zadanie 6. Przedstaw ilustrację graficzną zbioru rozwiązań układu:

$$\begin{cases} y - 2x < 2 \\ 2x + 3y - 6 < 0 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Zadanie 7. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} 2x - 3y + z = 17 \\ 3x - 2y = 5 \\ 2x - 3z = -12 \end{cases} \\ \text{(b)} \quad & \begin{cases} 2x + 2y - 6z = 8 \\ -x + y + 7z = -2 \\ -2x - 4y + 2z = -10 \end{cases} \end{aligned}$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie D.1. Rozwiąż równanie:

- (a) $|x - 1| + |2x + 3| = 4x - 1$;
 (b) $|x|x - 1| + 2| = 3$.

Zadanie D.2. Rozwiąż nierówność:

- (a) $|3x + |1 - 2x|| - 2 \geq 2x$;
 (b) $|x^2 + 3x + 1| \geq 1$.

Zadanie D.3. Rozwiąż układ równań:

- (a)
$$\begin{cases} \frac{x-y}{3} - \frac{1}{2} = \frac{x-y}{4} \\ \frac{x+y}{2} = 4,5 + \frac{y-1}{3} \end{cases}$$

 (b)
$$\begin{cases} \frac{1}{2}(y + \frac{x}{2}) - \frac{1}{5}(x + 2) = 1,1 \\ x - 2y + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}[2x + 3(y - \frac{1}{2})] \end{cases}$$

 (c)
$$\begin{cases} \frac{x}{3} - 2 = y - 2 \\ \frac{x+6}{3} + 3(y - 2) = 0 \end{cases}$$

Zadanie D.4. Rozwiąż układ równań i przeprowadź dyskusję istnienia i liczby rozwiązań w zależności od parametru:

- (a)
$$\begin{cases} 4x + 2(a + 1)y = a \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

 (b)
$$\begin{cases} 2x + ay = 1 \\ 3x + 2y = b \end{cases}$$

Zadanie D.5. Dla jakich wartości parametru k rozwiązanie układu

$$\begin{cases} x - y = k - 1 \\ 2x - y = 3 - k \end{cases}$$

jest:

- (a) parą liczb ujemnych,
 (b) parą liczb dodatnich,
 (c) parą liczb o przeciwnych znakach.

Zadanie D.6. Rozwiąż układ równań:

- (a)
$$\begin{cases} y + x - 1 = 0 \\ |y| - x - 1 = 0 \end{cases}$$

 (b)
$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x^2 + y^2 = 3 + 2y \end{cases}$$

 (c)
$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ (|x| - 2)^2 + (|y| - 2)^2 = 1 \end{cases}$$

Zadanie D.7. Przedstaw ilustrację graficzną zbioru rozwiązań układu:

$$\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ 2y + 5x \geq 10 \\ 5x - 2y - 10 \leq 0 \end{cases}$$

Zadanie D.8. Rozwiąż układ równań:

$$(a) \begin{cases} 2m + 3n = 12 \\ 3m + 2k = 11 \\ 2n + 4k = 10 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 3(x-1) + 2(y-2) + (z-7) = -8 \\ x + 2y + 7z = 10 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 3x - y - z = 4 \\ x + 2y - 5z = -1 \\ -x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

Zadanie D.9. Wiedząc, że układ równań

$$\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie wykaż, że $abc \neq 0$ i znajdź to rozwiązanie.

Zadanie 1. Wyznacz funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c$, dla której

- (a) wykres posiada wierzchołek w punkcie $P(2, 4)$ i przechodzi przez punkt $A(1, 0)$
- (b) wykres przechodzi przez punkt $A(2, 8)$ i jest styczny do osi OX w punkcie $B(4, 0)$
- (c) wykres przechodzi przez punkty $A(0, 1)$ i $B(2, 9)$ i jest styczny do osi OX
- (d) wykres jest symetryczny względem osi OY oraz przechodzi przez punkty $A(0, 1)$ i $B(1, 3)$
- (e) suma pierwiastków wynosi 8, suma odwrotności pierwiastków jest równa $2/3$ oraz wykres przechodzi przez punkt $A(0, 24)$
- (f) $a = 1$ oraz miejsca zerowe x_1, x_2 spełniają warunki $x_1^2 + x_2^2 = 5$, $x_1x_2 = 2$.

Zadanie 2. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji

- (a) $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ dla $x \in \langle 0, 3 \rangle$
- (b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ dla $x \in \langle -1, 3 \rangle$.

Zadanie 3. Rozwiąż równanie:

- (a) $x^2 - 5|x| + 4 = 0$
- (b) $4\sqrt{x+2} = |x+1| + 4$
- (c) $\sqrt{2|x| - x^2} = a$ w zależności od parametru a .

Zadanie 4. Rozwiąż nierówność:

- (a) $x^2 - |5x + 6| > 0$
- (b) $\sqrt{x} > x - 2$.

Zadanie 5. Dla jakich wartości parametru m

- (a) liczba 1 zawiera się między różnymi rozwiązaniami równania $(m-4)x^2 - 4x + m - 3 = 0$
- (b) równanie $|x-1| = m^2 - 4m - 1$ ma dwa pierwiastki dodatnie
- (c) wartość najmniejsza funkcji $f(x) = x^2 - x + m^2 - 2m + \frac{1}{4}$ należy do przedziału $\langle 1, 4 \rangle$
- (d) nierówność $(m-2)x^2 - |m-2|x + 2 > 0$ jest spełniona dla każdego x ?

Zadanie 6. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}(x-2)$. Narysuj wykres funkcji f . Wyznacz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m .

Zadanie 7. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 + 3x + \frac{2-m}{m-3} = 0,$$

ma dwa różne pierwiastki takie, że suma ich sześciątów jest równa -9 .

Zadanie 8. Dla jakich wartości parametru x funkcja $f(x) = x^2 - kx + k + 2$ ma dwa miejsca zerowe większe od 3?

Zadanie 9. Dla jakich wartości parametru m zbiór rozwiązań nierówności

$$x^2 - 2mx - m + 1 < 0$$

zawiera się w przedziale $(-3, 1)$?

Zadanie 10. Znajdź te wartości parametru m , dla których liczba 2 nie należy do zbioru rozwiązań nierówności $x^2 + (m^3 + 3)x - 6m^2 - 18m + 44 > 0$.

Zadanie 11. Dla jakich wartości m funkcja $f(x) = (m-4)x^2 - 4x + m - 3$ ma dwa miejsca zerowe, z których jedno jest mniejsze od 1 a drugie większe od 1?

Zadanie 12. Suma dwóch liczb jest równa 6. Znajdź te liczby, jeśli wiadomo, że suma podwojonego kwadratu jednej z nich i kwadratu drugiej jest najmniejsza z możliwych.

Zadanie 13. Znajdź tę wartość parametru m , dla której iloczyn pierwiastków równania $x^2 - 2mx + m^2 - 4m + 1 = 0$ jest najmniejszy.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie D.1. Wyznacz funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c$, dla której

- (a) wykres przechodzi przez punkty $O(0, 0)$ i $A(3, -3)$ i jest styczny do prostej $y - 1 = 0$
- (b) wykres jest symetryczny względem początku układu i przechodzi przez punkty $A(0, 1)$ i $B(1, 3)$
- (c) $a = 1$ oraz miejsca zerowe x_1, x_2 spełniają warunki $|x_2 - x_1| = 1$, $|x_1 x_2| = 2$
- (d) $a = 1$ oraz miejsca zerowe x_1, x_2 spełniają warunki $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$, $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 5$.

Zadanie D.2. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji

- (a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$ dla $x \in \langle 0, 3 \rangle$.

Zadanie D.3. Rozwiąż równanie:

- (a) $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5$
- (b) $x^2 + \sqrt{x(x-4)} = 2(1+2x)$.

Zadanie D.4. Rozwiąż nierówność:

- (a) $\sqrt{x^2 - 5x + 4} > x - 3$
- (b) $|x^2 - 3| < 1$.

Zadanie D.5. Dla jakich wartości parametru m

- (a) pierwiastki równania $x^2 + (3m - 2)x + m + 2 = 0$ spełniają warunek $x_1^2 + x_2^2 > 1$
- (b) trójmian $x^2 - mx + 2$ przyjmuje wartości ujemne dla $x \in (1, 2)$?

Zadanie D.6. Suma wszystkich współczynników równania kwadratowego jest równa zero. Wykaż, że każde równanie kwadratowe o tej własności ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste.

Zadanie D.7. Funkcja f dana jest wzorem: $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{3} - 1$. Uzasadnij, że funkcja f ma dwa dodatnie miejsca zerowe.

Zadanie D.8. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c funkcja:

$$f(x) = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$$

ma co najmniej jedno miejsce zerowe.

Zadanie D.9. Pierwiastkami równania $x^2 + px + p = 0$ są dwie różne liczby x_1, x_2 . Zbadaj, czy istnieje taka wartość parametru p , przy której wyrażenie $(x_1 + 2x_2) \cdot (x_2 + 2x_1)$ osiąga wartość 1.

Zadanie D.10. Wyznacz dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji f danej wzorem $f(m) = x_1 \cdot x_2$, gdzie x_1, x_2 są różnymi pierwiastkami równania $(m + 2)x^2 - (m + 2)^2x + 3m + 2 = 0$, w którym $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Zadanie D.11. Dla jakich wartości parametru k funkcja $f(x) = (k + 1)x^2 - kx + 2k - 3$ nie przyjmuje wartości dodatnich?

Zadanie D.12. Dla jakich wartości parametru k liczby $x = -1$ i $x = 1$ należą do zbioru rozwiązań nierówności $x^2 + \frac{k}{2k-1}x + k - 1 > 0$?

Zadanie D.13. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - x \cdot 2^m + 2^{m-1} = 0$ ma dwa pierwiastki?

Zadanie D.14. Rozwiąż równanie

$$3 - \sqrt{x-1} = \sqrt{x+2}.$$

Zadanie D.15. Rozwiąż równanie

$$\sqrt{x^2 + 6 + \sqrt{4 - x}} = x + 1.$$

Zadanie D.16. Wyznacz te wartości m , dla których równanie $(k + 1)x^2 - 2x + k - 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania należące do przedziału $(0, 2)$.

Zadanie D.17. Wyznacz tę wartość parametru k , dla której suma kwadratów pierwiastków równania $x^2 + 2kx + 3k^2 - 6k - 2 = 0$ jest największa z możliwych.

Zadanie D.18. Dla jakich wartości parametru a do zbioru rozwiązań nierówności $x^2 + (a + 2)x - a < 0$ należą tylko ujemne liczby?

Rozdział 7 – wielomiany i funkcje wymierne

Zadanie 1. Dla jakich wartości parametrów a, b, p, q następujące wielomiany zmiennej x są równe:
 $W(x) = (ax + b)(x^2 - 3x + 4)$ i $V(x) = (2x^2 + px + q)(x - 3)$?

Zadanie 2. Wyznacz wielomian czwartego stopnia, którego podwójnym pierwiastkiem jest liczba -2 , a pojedynczym liczba 3 i który przy dzieleniu przez $x^2 - 1$ daje resztę -24 .

Zadanie 3. Wykonać następujące dzielenia z resztą :

- (a) $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 16x + 13$ przez $x - 5$;
- (b) $2x^5 + 8x^4 + 7x^3 + 3x + 5$ przez $3x^3 + 7x^2 + 5x + 1$.

Zadanie 4. Rozwiąż równanie:

- (a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$;
- (b) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$
- (c) $x^4 + 3 - |3x^3 + x| = 0$.

Zadanie 5. Dla jakich wartości współczynników a i b wielomian $P(x) = x^{15} + ax + b$ jest podzielny przez $x^2 - 1$?

Zadanie 6. Dla jakiej wartości parametru m przy dzieleniu wielomianu $3x^2 + mx^2 - 4x + 2$ przez $x - 2$ otrzymujemy resztę 6 ?

Zadanie 7. Przy dzieleniu wielomianu $P(x)$ przez $x - 1$ otrzymujemy resztę 3 , przy dzieleniu przez $x - 2$ resztę 4 . Znajdź resztę z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez wielomian $x^2 - 3x + 2$.

Zadanie 8. Rozwiąż nierówność:

- (a) $x^3 - 5x^2 + 10x - 12 < 0$;
- (b) $x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 21x^2 - 10x - 24 < 0$;
- (c) $\sqrt{x^4 - x^2} \leq 5 - x^2$.

Zadanie 9. Rozwiąż równania i nierówności

- (a) $\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 7x + 10} = 0$;
- (b) $\frac{3x^3}{x^2 - 1} - \frac{4x + 16}{x + 1} = 0$;
- (c) $\frac{x - 2}{x + 2} \geq \frac{2x - 3}{4x - 1}$;
- (d) $\left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| \leq 1$;
- (e) $\sqrt{\frac{x^3 + 8}{x}} > x - 2$.

Zadanie 10. Dla jakich wartości parametru m

- (a) równanie $\left| \frac{x}{x-1} \right| = m$ ma dokładnie jeden pierwiastek
- (b) równanie $\frac{|x-1|}{x^2-1} = m$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste
- (c) równanie $\frac{x(1+x^2)}{|x|} = m$ nie ma pierwiastków
- (d) układ równań $\begin{cases} x^2 - y^2 = m \\ y - mx = 0 \end{cases}$ ma rozwiązanie?

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie D.1. Wykonać następujące dzielenia z resztą :

- (a) $2x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 3$ przez $3x^2 + x + 4$
- (b) $x^5 + 4x^4 + 3x^2 + 2$ przez $2x^3 + x + 4$;
- (c) $x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 13$ przez $x + 1$.

Zadanie D.2. Rozwiąż równanie:

- (a) $x^4 + 4x^3 - 25x^2 - 16x + 84 = 0$;
- (b) $x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 16x^2 + 29x + 12 = 0$.

Zadanie D.3. Dany jest wielomian $W(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 + mx + 2$ zmiennej x z parametrem $m \in \mathbb{R}$. Wyznacz wszystkie wartości m , dla których wielomian W jest podzielny przez trójmian $Q(x) = x^2 - x + 1$.

Zadanie D.4. Rozwiąż nierówność:

- (a) $(2x - 5)(x^2 - 4)(x^3 + 8) \leq 0$;
- (b) $x^4 \leq x^2$;
- (c) $|x^3 - 1| \leq x^2 + x + 1$.

Zadanie D.5. Rozwiąż równania i nierówności

- (a) $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 = 0$
- (b) $\sqrt{x} = \frac{3}{6\sqrt{x} + \sqrt{4x-2}}$
- (c) $\frac{x^2+1}{x} > \frac{x^2}{x+1}$
- (d) $\frac{(x+3)^2(x^2+x+1)}{(4-x)x} \geq 0$
- (e) $\frac{14}{x^2-5x+6} < \frac{10}{2-x} - 3$.

Zadanie D.6. Reszta z dzielenia wielomianu W przez wielomian $Q(x) = x^4 + x^3 - x - 1$ jest równa $x^3 + x^2 + x + 2$. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu W przez $x^2 - 1$.

Zadanie D.7. Dany jest wielomian postaci $x^3 + ax^2 + bx + 6r$, gdzie r jest różnicą ciągu arytmetycznego, którego pierwsze trzy wyrazy są pierwiastkami tego wielomianu. Drugi wyraz tego ciągu jest równy 2. Oblicz pierwiastki tego wielomianu.

Zadanie D.8. Wielomiany $W(x) = x^3 - ax + 4$ oraz $V(x) = x^2 + x - a$ mają wspólny pierwiastek. Oblicz a oraz pierwiastki tych wielomianów.

Zadanie D.9. Udowodnij, że jeżeli reszta z dzielenia wielomianu $P(x) = x^3 + 4x + ax + b$ przez wielomian $Q(x) = x^2 + x - 2$ jest wielomianem stałym, to $a = -7$.

Zadanie D.10. Zbadaj liczbę pierwiastków wielomianu $x^4 + (1-3m)x^2 + 2m^2 - 2m = 0$ w zależności od parametru m .

Zadanie D.11. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x + 3$ wynosi 2, a przy dzieleniu przez $x - 2$ reszta wynosi -1 . Jaka jest reszta z dzielenia tego wielomianu przez $x^2 + x - 6$?

Zadanie 1. Zbadaj parzystość i nieparzystość następujących funkcji

(a) $f(x) = x^{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$

(b) $f(x) = \cos 2x + \sqrt{1+x^2}$

(c) $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ \frac{1}{x}, & |x| \geq 1 \end{cases}$

Zadanie 2. Wykaż, że dla dowolnej funkcji f funkcja $g(x) = f(x) + f(-x)$ jest parzysta, a funkcja $h(x) = f(x) - f(-x)$ jest nieparzysta. Następnie pokaż, że każda funkcja jest sumą funkcji parzystej i nieparzystej.

Zadanie 3. Zbadaj monotoniczność następujących funkcji

(a) $f(x) = -\frac{3}{4}x + 2$

(b) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = |x - 1|$

(d) $f(x) = ||x - 2| - 3|$

Zadanie 4. Zbadaj okresowość następujących funkcji

(a) $f(x) = [x]$, gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą niż x

(b) $f(x) = [x] - x$

(c) $f(x) = x^2 - [x^2]$

(d) $f(x) = \sin x + \cos x$

(e) $f(x) = 1 + \sin 2x$

(f) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$

Zadanie 5. Wykaż, że funkcja $\frac{1-x}{1+x}$ jest odwrotna względem siebie. Sporządź wykres.

Zadanie 6. Sprawdź różnowartościowość następujących funkcji i wyznacz funkcję odwrotną, o ile to możliwe

(a) $f(x) = \frac{2x}{1+x}$

(b) $f(x) = x^2 - x$

(c) $f(x) = \begin{cases} -x, & |x| \leq 1 \\ x^3, & |x| > 1 \end{cases}$

Zadanie 7. Narysuj wykres funkcji

(a) $x^2 + 4x - 2$

(b) $-2x^2 + 18x - 6$

(c) $||x| - 5|$

(d) $|x|^2 - 2|x| + 2$

(e) $\frac{-2x}{1+x}$

(f) $\sin(2x + 1)$

(g) $\sin(2(x + 1))$

Zadanie 8. Opisz podstawowe własności funkcji $f(x) = ax + b$ w zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$.

Zadanie 9. Znaleźć funkcję, której wykres jest prostą prostopadłą (równoległą) do prostej $y - 2x + 10 = 0$ i przechodzącą przez punkt $(1, 1)$.

Zadanie 10. Zilustruj zbiór liczb $x, y \in \mathbb{R}$ takich, że $|x| + |y| = 1$.

Zadanie 1. Napisz równanie okręgu stycznego do dwóch prostych o równaniach:

$$x + y - 2 = 0, \quad x + y + 3 = 0$$

i przechodzącego przez punkt $P = (1, 0)$.

Zadanie 2. Wyznacz liczbę punktów wspólnych okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 4 = 0$ z prostą o równaniu $y = x + m$ w zależności od wartości parametru m .

Zadanie 3. Wyznacz równanie stycznych do okręgu $x^2 + y^2 + 4x + 1 = 0$

- (a) przechodzących przez początek układu współrzędnych,
- (b) równoległych do prostej $y = 2x - 7$.

Zadanie 4. Wyznacz pole trójkąta o wierzchołkach $A = (0, x)$, $B = (x, 3)$, $C = (1, 3)$ jako funkcję f zmiennej x i naskicuj jej wykres. Wyznacz liczbę rozwiązań równania $f(|x|) = m$ w zależności od wartości parametru $m \in \mathbb{R}$.

Zadanie 5. Dane są punkty $A = (2, 3)$ i $B = (5, 4)$. Na prostej o równaniu $y = 5$ wyznacz punkt C tak, aby łamana ACB miała jak najmniejszą długość. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 6. Dany jest okrąg i prosta odpowiednio o równaniach:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0, \quad 3x + y - 19 = 0$$

Znajdź najmniejszą z odległości $|AB|$, gdzie A jest punktem na okręgu, a B punktem na prostej.

Zadanie 7. Przez środek okręgu prowadzimy dwie różne średnice AC i BD . Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ jest prostokątem.

Zadanie 8. Rozważmy dwa okręgi współśrodkowe: jeden o promieniu 3, drugi o promieniu 5. Znajdź długość odcinka stycznej do mniejszego okręgu, zawartego w większym okręgu.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie D.1. Znajdź równanie okręgu o środku w punkcie $S = (1, 3)$, wiedząc, że:

- 1. początek układu współrzędnych należy do tego okręgu;
- 2. do okręgu należy punkt $A = (2, -1)$;
- 3. okrąg jest styczny do prostej $x = -1$.

Zadanie D.2. Okrąg, którego środek należy do osi OY i promień ma długość $r = \sqrt{5}$ jest styczny do prostej o równaniu $x + 2y - 1 = 0$. Napisz równanie tego okręgu.

Zadanie D.3. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC , gdzie $A = (-2, 1)$, $B = (0, -3)$ i $C = (4, 3)$.

Zadanie D.4. Okrąg o równaniu $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ jest opisany na pewnym trójkącie równobocznym ABC . Znajdź równanie okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie D.5. Promień okręgu wpisanego w romb $ABCD$ jest równy $r = 2$, a współrzędne końców przekątnej AC są następujące: $A = (-2, 3)$, $C = (4, -1)$. Oblicz współrzędne punktów B i D .

Zadanie D.6. Dany jest okrąg o równaniu:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

i prosta $x - y - 1 = 0$. Oblicz długość cięciwy tego okręgu zawartej w danej prostej i jej odległość od środka.

Zadanie D.7. W trójkąt równoramienny o obwodzie 40 wpisano okrąg, którego promień jest równy $\frac{2}{5}$ wysokości poprowadzonej do podstawy. Obliczyć długości boków tego trójkąta.