

1. Liczby zespolone

1.1. Stwierdzić kiedy kwadrat liczby zespolonej jest liczbą

- (i) rzeczywistą,
- (ii) ujemną,
- (iii) tylko urojoną?

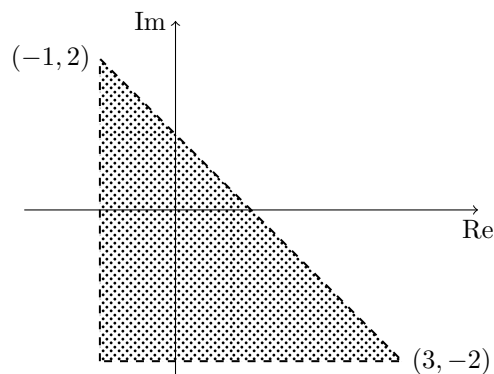
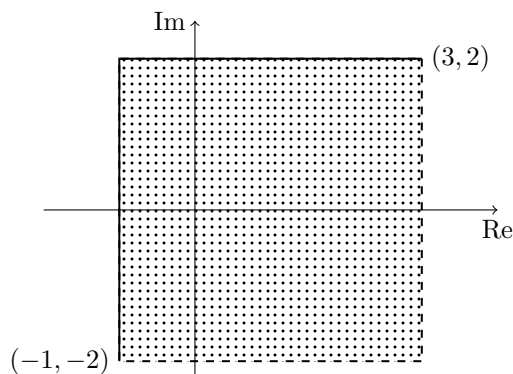
1.2. Doprowadzić do postaci $a + ib$ liczby zespolone

- (i) $(1 - 13i)/(1 - 3i)$,
- (ii) $\sqrt{-5 - 12i}$,
- (iii) $\frac{(\overline{1+2i})^2}{3i-4}$.

1.3. Narysować zbiór tych punktów płaszczyzny zespolonej, które spełniają warunek:

- (i) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < \operatorname{Re}(z) < 2\}$,
- (ii) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - i| = \sqrt{2}\}$,
- (iii) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - 2i| = \operatorname{Re}(z) + 1\}$,
- (iv) $\{z \in \mathbb{C} : z = \bar{z}\}$.

1.4. Za pomocą liczb zespolonych opisać poniższe zbiory



1.5. Obliczyć

$$(-\sqrt{3} + i)^{32}.$$

1.6. Znaleźć sumę kątów α, β, γ , gdzie kąty te są argumentami liczb zespolonych odpowiednio $1 + i, 2 + i, 3 + i$.

1.7. Obliczyć granicę ciągu liczb zespolonych

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (4n + n^2 i) / (5n^2 - 2i)$,
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (4 + 2n^2 + 5in) / (1 - 4n + n^2 - in^2)$,
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} ((2 - i)/3)^n$

1.8. Zbadaj zbieżność szeregów

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+i}{4}\right)^n$,
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$,
- (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2+i}$.

1.9. Niech P będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Pokazać, że $P(z) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P(\bar{z}) = 0$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

D.1.1. Doprowadzić do postaci $a + ib$ liczby zespolone $1/(4 + 3i)$, $\sqrt{-6}$, $\sqrt{i}$.

D.1.2. Narysować zbiory punktów $\{z \in \mathbb{C} : 1 < \operatorname{Im}(z) < 2\}$, $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| = |z - b|, a \neq b, a, b \in \mathbb{R}\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z)\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(iz) < 1\}$.

D.1.3. Udowodnić, że jeżeli $z_1 = |z_1|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ oraz $z_2 = |z_2|(\cos \beta + i \sin \beta)$, to

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$$

oraz

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)).$$

Wyprowadzić stąd wzór

$$z^n = |z|^n(\cos n\alpha + i \sin n\beta).$$

D.1.4. Podać w postaci $a + bi$ liczby

$$\frac{(1+i)^{31}}{(1-i\sqrt{3})^{13}}, \quad \frac{(1-i)^{23}}{(\sqrt{3}+i)^{10}}.$$

D.1.5. Zbadaj zbieżność ciągów (jeśli to możliwe policz granice) lub szeregów

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+i}{5n-4i}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4+3i}{5}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+3i)^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^n}.$$

D.1.6. Niech u, v, w będą liczbami zespolonymi o module równym 1. Uzasadnić, że $u + v + w = 1$, o ile

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 1.$$

2. Funkcje holomorficzne

2.1. Wyznaczyć część rzeczywistą i część urojoną funkcji:

(i) $f(z) = z^2$,

(ii) $f(z) = \operatorname{Re}(z)/z$.

2.2. Opisać działanie funkcji $f(z) = \frac{1}{z}$ wewnątrz koła jednostkowego oraz na zewnątrz. Na co ta funkcja przekształca okrąg jednostkowy?

2.3. Zbadać, czy istnieje funkcja ciągła $\Gamma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ taka, że $\Gamma|_{\mathbb{C} \setminus \{0\}} = f$, gdzie

(i) $f(z) = z/|z|$,

(ii) $(z\operatorname{Re}(z))/|z|$.

2.4. Korzystając z definicji uzasadnić, że funkcja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ jest holomorficzna na $\mathbb{C}$.

2.5. Zróżniczkować funkcję

(i) $f(z) = 1/z$,

(ii) $f(z) = \bar{z}$.

2.6. Udowodnić, że funkcja $f(z) = f(x+iy) = \sqrt{|xy|}$, określona w pewnym otoczeniu zera, nie jest różniczkowalna w $z = 0$, ale spełnia w tym punkcie warunki Cauchy'ego-Riemanna.

2.7. Znaleźć funkcję holomorficzną $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ na $\mathbb{C}$, wiedząc, że $u(x,y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$ oraz $f(0) = 0$.

2.8. Czy holomorficzna w pewnym obszarze D funkcja $f = u + iv$ może przyjmować wartości wyłącznie rzeczywiste? Opisać wszystkie takie funkcje.

2.9. Przypuśćmy, że $f = u + iv \in H(D)$, gdzie D jest pewnym obszarem. Zdefiniujmy funkcję g wzorem

$$g(z) = \overline{f(z)}.$$

Podać warunki jakie musi spełniać funkcja f , aby $g \in H(D)$.

2.10. Pokazać, że jeżeli f jest holomorficzna w obszarze D oraz $|f|$ jest funkcją stałą, to f jest stała.

2.11. Udowodnić, że jeżeli $u(x,y)$ jest częścią rzeczywistą funkcji $f = u + iv$, holomorficznej w pewnym obszarze D , oraz jeżeli pochodne cząstkowe drugiego rzędu są ciągłe, to

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

2.12. Udowodnić, że jeżeli funkcja $f = u + iv \in H(D)$, gdzie D jest obszarem, to dla $x_0 + iy_0 \in D$ mamy

$$f'(x_0 + iy_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

2.13. Niech $f(x + iy) = y^2 - 3ix^2$. Znaleźć punkty, w których f' istnieje oraz obliczyć pochodną w tych punktach.

2.14. W jakich punktach płaszczyzny zespolonej różniczkowalna jest funkcja $f(z) = e^{iz} + z^2$?

2.15. Udowodnić, że jeżeli $f, g \in H(D)$, gdzie D jest obszarem oraz $f(z_0) = g(z_0) = 0$ i $g'(z_0) \neq 0$, gdzie $z_0 \in D$, to

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

D.2.1. Niech $f(x + iy) = 2xy + 2iy$. Znaleźć punkty, w których f' istnieje oraz obliczyć pochodną w tych punktach.

D.2.2. Znaleźć wszystkie funkcje całkowite $f = u + iv$ takie, że $u(x, y) = x^2 + y^2$.

D.2.3. Sprawdzić, że funkcja $f(z) = z \operatorname{Im}(z)$ jest różniczkowalna tylko w punkcie $z = 0$.

D.2.4. Wskazać punkty, w których funkcja $f(z) = |z|^2$ jest różniczkowalna.

D.2.5. Niech $f(z) = x^3y^2 + ix^2y^3$, $z = x + iy$. W których punktach płaszczyzny funkcja f jest różniczkowalna?

D.2.6. Znaleźć funkcję całkowitą $f = u + iv$ wiedząc, że

(i) $u(x, y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$, $f(0) = 0$,

(ii) $u(x, y) = y/(x^2 + y^2)$, $f(1) = i$.

D.2.7. Określić punkty, w których różniczkowalna jest funkcja $f(x + iy) = 2x^2 + y + i(y^2 - x)$.

D.2.8. Dla jakich liczb $a, b, c \in \mathbb{R}$ funkcja

$$f(x + iy) = x + ay + ibx + icy$$

jest różniczkowalna?

D.2.9. Znaleźć wszystkie funkcje całkowite $f = u + iv$, spełniające równość $u(z) = v^2(z)$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$.

D.2.10. Udowodnić, że jeżeli $f \in H(D)$ (D jest obszarem) oraz $f'(z) = 0$ dla $z \in D$, to f jest funkcją stałą.

D.2.11. Udowodnić, że jeżeli $f, g \in H(D)$, gdzie D jest obszarem oraz $f'(z) = g'(z)$ dla $z \in D$, to $f - g$ jest funkcją stałą.

D.2.12. Wyznaczyć część rzeczywistą i część urojoną funkcji $f(z) = z|z|$.

D.2.13. Obliczyć

(i) $\lim_{z \rightarrow 2+i} \frac{z^2 - 4z + 5}{z^3 - z - 10i}$;

(ii) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z}$.

3. Szeregi potęgowe. Szeregi Taylora

3.1. Pokazać, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ jest zbieżny bezwzględnie w kole otwartym $|z| < 1$, nie jest natomiast zbieżny na okręgu jednostkowym.

3.2. Pokazać, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n^2$ jest zbieżny bezwzględnie w kole otwartym $|z| < 1$ oraz jest zbieżny na okręgu jednostkowym.

3.3. Pokazać, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n$ jest zbieżny bezwzględnie w kole otwartym $|z| < 1$ oraz jest zbieżny na okręgu jednostkowym poza punktem 1.

3.4. Znaleźć promień zbieżności poniższych szeregów potęgowych:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^n$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$;

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$;

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n)^n z^n$;

(v) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$.

3.5. Wyznaczyć koło zbieżności szeregu potęgowe:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (2i)^n (z - i)^{n!}$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^n} (z - 1 + i)^n$.

3.6. Przypuśćmy, że szereg $\sum a_n z^n$ ma promień zbieżności $r > 0$. Jakie promień zbieżności będzie miał szereg $\sum_{n=0}^{\infty} n^d a_n z^n$?

3.7. Rozwinąć daną funkcję w szereg Taylora w punkcie z_0 , gdzie

(i) $1/z$ w punkcie $z_0 = i$,

(ii) $1/(z - 5)$ w punkcie $z_0 = 1$,

(iii) $1/z^2$ w punkcie $z_0 = 3$,

(iv) $1/[(z + 1)(z + 2)]$ w punkcie $z_0 = 0$.

3.8. Zbadać holomorficzność funkcji

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & \text{jeżeli } z \neq 0, \\ 1, & \text{jeżeli } z = 0. \end{cases}$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania**D.3.1.** Sprawdzić, czy szereg jest zbieżny

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} + i \frac{\cos n}{n^2};$$

$$(ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log n}{n!} i^n;$$

$$(iii) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+4i}{4} \right)^n;$$

$$(iv) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+3i)^n}{n!};$$

$$(v) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+3i)^n}{(n+41)^2};$$

$$(vi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+i}{n^3};$$

$$(vii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{4n^2} i^n.$$

D.3.2. Obliczyć promień zbieżności oraz podać obszar, w którym zbieżny jest każdy z poniższych szeregów potęgowych

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n;$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} 3^n (z+1)^n;$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} n(n!) z^{n-1};$$

$$(iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n+1}}{n+1};$$

$$(v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n}.$$

D.3.3. Wyznaczyć koło zbieżności szeregu potęgowe:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-2i)^{n+1}} (z-2i)^n;$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n(1+i)} (z+3i)^n;$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2i)^n} z^{3n}.$$

D.3.4. Przypuśćmy, że szereg $\sum a_n z^n$ ma promień zbieżności $r > 0$. Jakie promienie zbieżności będą miały szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n}$?

D.3.5. Wyznaczyć szereg Taylora funkcji $f(z) = \frac{1}{1-z}$ o środku w $z_0 = 3i$.

D.3.6. Wyznaczyć szereg Taylora funkcji $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ o środku w $z_0 = 0$.

D.3.7. Nie rozwijając funkcji $f(z) = \frac{z-7}{z^2-2z-3}$ w szereg Taylora, stwierdzić jaki jest promień zbieżności tego szeregu.

D.3.8. Rozwinąć w szereg Taylora o środku w punkcie 0 funkcję $f(z) = z^2 e^{-z^3}$.

D.3.9. Niech $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$. Pokazać, że

$$f''(z) = f(z).$$

D.3.10. Opisać wszystkie ciągłe funkcje $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ spełniające warunek

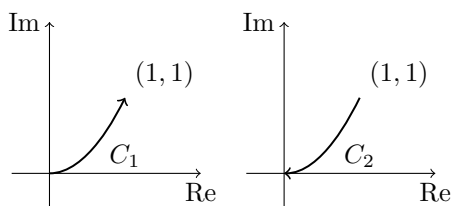
$$f(z) = f(2z) \quad \text{dla wszystkich } z \in \mathbb{C}.$$

D.3.11. Opisać wszystkie funkcje holomorficzne na $\mathbb{C}$ takie, że

$$f(z) = \frac{1}{2}f(2z) \quad \text{dla wszystkich } z \in \mathbb{C}.$$

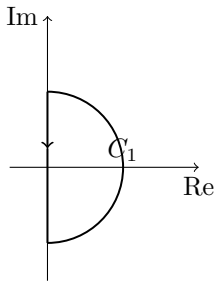
4. Całka krzywoliniowa

4.1. Znajdź wartość całki krzywoliniowej z funkcji $f(z) = 3z$ liczonej wzdłuż krzywej C_1 oraz C_2 , gdzie



4.2. Obliczyć

$$\int_C |z| dz, \quad \text{gdzie}$$



4.3. Uzasadnij, że

$$\int_C (z - z_0)^k dz = \begin{cases} 0, & k \neq -1, \\ 2\pi i, & k = -1, \end{cases}$$

gdzie C jest dodatnio zorientowanym okręgiem jednostkowym o środku w punkcie z_0 .

4.4. Udowodnij, że jeżeli C jest krzywą gładką z punktu z_1 do z_2 , to

$$\int_C dz = z_2 - z_1.$$

4.5. Udowodnij, że całka krzywoliniowa może zależeć od wyboru krzywej. Niech $f(z) = \operatorname{Re} z$, a C i C' będą dwiema liniami łączącymi 0 i $1 + i$. C niech ma parametryzację $z = (1 + i)t$, a C' składa się z dwóch odcinków sparametryzowanych następująco: $z = t$ dla $0 \leq t \leq 1$ oraz $z = 1 + is$ dla $0 \leq s \leq 1$. Udowodnij, że

$$\int_C \operatorname{Re} z dz \neq \int_{C'} \operatorname{Re} z dz.$$

4.6. Korzystając z wzoru całkowego Cauchy'ego obliczyć

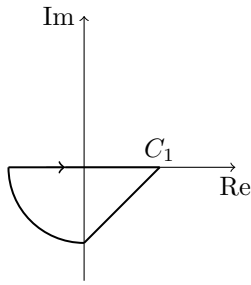
- (i) $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz;$
- (ii) $\int_{|z-1|=2} \frac{1}{z^2-2z} dz;$
- (iii) $\int_{|z-2|=4} \frac{\cos z}{z^2+4} dz.$

4.7. Pokazać, że nie istnieje taka funkcja f holomorficzna na $\mathbb{C} \setminus 0$, że $f'(z) = \frac{\cos z}{z}$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

D.4.1. Obliczyć

$$\int_C z \operatorname{Re} z dz, \quad \text{gdzie}$$



D.4.2. Obliczyć

$$\int_C z e^{z^2} dz,$$

gdzie C jest odcinkiem łączącym punkty $1 + i$ oraz $-1 - i$.

D.4.3. Znajdź wartość całki krzywoliniowej z funkcji f liczonej wzdłuż krzywej C , gdzie

(i) $f(z) = \operatorname{Re} z$, C górnym półokręgiem zorientowanym dodatnio o środku w zerze i promieniu 3;

(ii) $f(z) = f(x + iy) = x + 2iy$, C jest okręgiem jednostkowym o środku w zerze zorientowanym dodatnio.

D.4.4. Obliczyć całkę

$$\int_C \frac{e^z}{z(z-1)} dz,$$

gdzie C jest kwadratem o wierzchołkach w punktach $\pm(2 \pm 2i)$ zorientowanym dodatnio.

D.4.5. Obliczyć całkę

$$\int_C \frac{z}{z^4 - 1} dz,$$

gdzie C jest zorientowanym dodatnio okręgiem $|z - 2| = 2$.

D.4.6. Obliczyć

$$\int_{|z|=2} \frac{z}{(z^2 - 9)(z + i)} dz.$$

D.4.7. Udowodnić, że wartość średnia funkcji $f \in H(U)$, $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ liczona po okręgu $z = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ i $r < 1$, nie zależy od r , tzn. obliczyć całkę

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) dt$$

i uzasadnić, że wartość tej całki nie zależy od r .

D.4.8. Obliczyć

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2 - 3z + 4}{z + i} dz.$$

D.4.9. Obliczyć

$$\int_{|z|=1} \frac{z+2}{z^4+2iz^3} dz.$$

D.4.10. Obliczyć

$$\int_{|z-i|=3} \frac{z^2}{(z-3i)^2} dz.$$

D.4.11. Obliczyć

$$\int_T (z + iz^2 + \operatorname{Re} z) dz,$$

gdzie T jest dodatnio zorientowanym trójkątem o wierzchołkach w punktach $0, 1, 1+2i$.

D.4.12. Obliczyć

$$\int_{|z-1|=2} \left(5z \sin z + \frac{z}{z-i} \right) dz.$$

5. Zastosowanie całki krzywoliniowej w analizie zespolonej

5.1. Obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2} dx.$$

5.2. Obliczyć całkę niewłaściwą

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2+1} dx.$$

5.3. Opierając się na poprzednim zadaniu znaleźć wartość całek niewłaściwych

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx \quad \text{oraz} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} dx.$$

5.4. Znaleźć wartość całki

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta},$$

gdzie $a > 1$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

D.5.1. Obliczyć całki

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \sin(n\theta - \sin \theta) d\theta \quad \text{oraz} \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(n\theta - \sin \theta) d\theta.$$

Wskazówka: można scałkować funkcję $f(z) = e^z \cdot z^{-(n+1)}$ wzdłuż okręgu jednostkowego o środku w zerze.

D.5.2. Obliczyć

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx.$$

D.5.3. Obliczyć

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 4)} dx.$$

D.5.4. Obliczyć

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{1 - \cos \theta + 1/2} d\theta.$$

D.5.5. Uzasadnić, że

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + 4)^2} = \frac{\pi}{16}.$$

D.5.6. Uzasadnić, że

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \frac{1}{3} \sin \theta} = \frac{3\sqrt{2}\pi}{2}.$$

D.5.7. Uzasadnić, że

$$\int_0^{2\pi} \frac{3d\theta}{3 - \sin \theta} = \frac{3\pi}{\sqrt{2}}.$$

D.5.8. Udowodnić, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

6. Funkcje całkowite

6.1. Udowodnić, że jeżeli $f \in H(\mathbb{C})$ oraz $|f(z)| \leq A + |z|^k$ dla $z \in \mathbb{C}$, $A > 0$ i $k \in \mathbb{N}$, to f jest wielomianem. Wyprowadzić stąd twierdzenie Liouville'a.

6.2. Pokazać, że jeśli część rzeczywista funkcji całkowitej jest ograniczona z góry, to funkcja jest stała.

6.3. Co można powiedzieć o funkcji całkowitej f , jeżeli wiadomo, że dla dowolnych $z \in \mathbb{C}$ spełnione są jednocześnie równości:

(i) $f(z+1) = f(z)$,

(i) $f(z+i) = f(z)$?

Zadania do samodzielnego rozwiązania

D.6.1. Czy może istnieć funkcja całkowita f taka, że $f(z) = \frac{z}{z+2}$ dla $|z| > 3$?

D.6.2. Wyliczyć całkę

$$\int_C \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)},$$

gdzie $f \in H(\mathbb{C})$, C jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w zerze i promieniu $R > 0$, $a, b \in \mathbb{C}$ oraz $|a| < R$, $|b| < R$. Wyciągnąć wniosek, że gdy f jest funkcją ograniczoną na całej płaszczyźnie, to f jest stała (prawdziwe jest zatem tzw. *twierdzenie Liouville'a*).

D.6.3. Wykazać, że jeżeli część urojona funkcji całkowitej f jest ograniczona z dołu, to funkcja ta jest stała.

D.6.4. Co można powiedzieć o funkcji całkowitej f , jeżeli wiadomo, że $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 1$?

D.6.5. Wykazać, że jeżeli f jest funkcją całkowitą oraz

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(f(z))^2}{z} = 0,$$

to funkcja f jest stała.

D.6.6. Co można powiedzieć o funkcji całkowitej f , jeżeli wiadomo, że $1 \leq |f(z)|$ dla $z \in \mathbb{C}$?

7. Twierdzenie o jednoznaczności. Zasada maksimum

7.1. Co można powiedzieć o funkcji holomorficzej na kole $|z| < 1$, dla której

$$f\left(\frac{i}{n}\right) = i, \quad \text{gdzie } n = 2, 3, 4, \dots$$

7.2. Czy istnieje funkcja analityczna na kole $|z| < 2$, która w punktach $1, 1/2, 1/3, \dots$ przyjmuje odpowiednio wartości $1, 0, 1/3, 0, 1/5, \dots$?

7.3. Czy istnieje funkcja analityczna na kole $|z| < 2$, dla której

$$(i) \quad f(1/n) = f(-1/n) = 1/n^2,$$

$$(ii) \quad f(1/n) = f(-1/n) = 1/n^3?$$

7.4. Co można powiedzieć o funkcji analitycznej na $|z| < 3$, jeżeli $f(i + i/n) = 3$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$?

7.5. Znaleźć różną od stałej funkcję $f \in H(U)$, gdzie $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ taką, że jej ciąg zer ma punkt skupienia w $\overline{U}$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

D.7.1. Co można powiedzieć o funkcji f holomorficzej na $|z| < 1$, jeżeli wiadomo, że $1 \leq |f(z)|$ oraz $f(0) = 1$. Opierając się na powyższym zadaniu sformułować tzw. *zasadę minimum*. Przedyskutować założenia, jakie powinny pojawić się o funkcji f .

D.7.2. Wyznaczyć maksimum funkcji $f(z) = 2z + 3 + i$ w zbiorze $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$.

D.7.3. Wyznaczyć maksimum oraz minimum funkcji $f(z) = -2iz^2 + 5$ w zbiorze $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

D.7.4. Co można powiedzieć o funkcji analitycznej f na $|z| < 1$, jeżeli $|f(z)| \leq 3$ dla każdego $|z| < 1$ oraz $f(i/2) = -3i$?

D.7.5. Niech f będzie funkcją holomorficzną w dysku jednostkowym. Pokazać, że jeśli $\operatorname{Re} f$ przyjmuje ekstremum lokalne w pewnym punkcie wewnętrznym dysku jednostkowego, to f jest stała.

D.7.6. Przypuśćmy, że $f \in H(U)$, f jest ciągła na $\overline{U}$, $|f(z)| > 1$ gdy $|z| = 1$ oraz $f(0) = 1$. Czy istnieje taki punkt $z_0 \in U$, że $f(z_0) = 0$?

8. Szeregi Laurenta oraz osobliwości funkcji holomorficzych

8.1. Znaleźć szereg Laurenta z funkcji

$$f(z) = \frac{3}{2z+4} + \frac{1}{3z+9}$$

w pierścieniach

- (i) $S = \{z : 2 < |z| < 3\}$,
- (ii) $G = \{z : |z| > 3\}$,
- (iii) $D = \{z : |z| < 2\}$.

8.2. Rozwinąć funkcję

$$f(z) = \frac{3}{(2z+4)^2} + \frac{1}{(3z+9)^2}$$

w szereg potęgowy w pierścieniach z poprzedniego zadania.

8.3. Znaleźć szereg Laurenta funkcji $\exp(1/z)$ dla $|z| > 0$.

8.4. Wyznaczyć obszar, w którym zbieżny jest dany szereg Laurenta oraz znaleźć sumę tego szeregu (funkcję do jakiej zbieżny jest niemal jednostajnie).

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} z^n.$$

8.5. Rozwinąć funkcję

$$f(z) = \frac{e^z}{z^4}$$

w szereg Laurenta o środku w $z_0 = 0$.

8.6. Określić krotność zera z_0 funkcji f

- (i) $f(z) = z \exp(z)$, $z_0 = 0$,
- (ii) $f(z) = z^2 \sin z$, $z_0 = 0$,
- (iii) $f(z) = \frac{(\frac{\pi}{2}-z)^2}{\cos z}$, $z_0 = \frac{\pi}{2}$.

8.7. Określić punkty osobliwości oraz określić ich rodzaj dla funkcji f :

- (i) $f(z) = \frac{e^z}{z}$,
- (ii) $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$,
- (iii) $f(z) = z^2 \exp(\frac{1}{z})$,
- (iv) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$,
- (v) $f(z) = -\frac{e^{2z}}{z^4}$,
- (vi) $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+6iz-9}$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

D.8.1. Udowodnić, że jeżeli $f^{(k)} \equiv 0$ w obszarze D , dla pewnego k , oraz f jest holomorficzna na D , to f jest wielomianem stopnia co najwyżej n .

D.8.2. Znaleźć szereg Laurenta dla funkcji

$$f(z) = \frac{6z + 8}{(2z + 3)(4z + 5)}$$

w pierścieniach

- (a) $\{z : 5/4 < |z| < 3/2\}$,
- (b) $\{z : |z| > 3/2\}$,
- (c) $\{z : |z| < 5/4\}$.

D.8.3. W pierścieniu $2 < |z - 2| < 4$ rozwinąć w szereg Laurenta funkcję

$$f(z) = \frac{6}{z(z - 2)^5(z - 6)}.$$

D.8.4. Określić krotność zera z_0 funkcji f

- (i) $f(z) = z^4(1 - \cos z)$, $z_0 = 0$,
- (ii) $f(z) = e^{z-1} - z + 1$, $z_0 = 1$,
- (iii) $f(z) = \frac{z^4}{\sin z}$,
- (iv) $f(z) = (1 - e^{iz}) \sin^2 z$, $z_0 = 0$.

D.8.5. Określić rodzaj osobliwości funkcji f w punktach osobliwych

- (i) $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^3}$,
- (ii) $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$,
- (iii) $f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z^3}$.

9. Residua, twierdzenie o residuach

9.1. Znaleźć bieguny, określić ich rzędy i obliczyć residuum danej funkcji

(i)

$$f(z) = -\frac{e^{2z}}{z^4},$$

(ii)

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 6iz - 9}.$$

9.2. Udowodnić, że jeżeli z_0 jest biegunem pierwszego rzędu funkcji f , to

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

9.3. Obliczyć całki

(i)

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{z^4} dz,$$

(ii)

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2 - 1} dz,$$

(iii)

$$\int_{|z-1|=2} z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz.$$

9.4. Udowodnić, że jeżeli funkcje $h = f/g$ ma w z_0 biegun pierwszego rzędu oraz $g'(z_0) \neq 0$, to

$$\operatorname{res}(h, z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

9.5. Obliczyć

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{z+4}}{\sin z} dz.$$

9.6. Znaleźć rozwinięcie w szereg Laurenta funkcji $f(z) = \exp(z + z^{-1})$ w obszarze $D = \{z : 0 < |z| < \infty\}$ oraz obliczyć residuum $\operatorname{res}(f, 0)$. Następnie obliczyć całkę

$$\int_{|z|=1} \exp(z + z^{-1}) dz.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania**D.9.1.** Znaleźć wartość residuum funkcji f w punkcie 0, jeżeli

(i) $f(z) = (z^2 + 1)/z,$

(ii) $f(z) = (z^2 + 3z - 5)/z^3,$

(iii) $f(z) = e^z / \sin z.$

D.9.2. Znajdź wartość residuum funkcji f w punkcie 1, jeśli

(i) $f(z) = (z^3 - 1)(z + 2)/(z^4 - 1)^2,$

(ii) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)}.$

D.9.3. Obliczyć residua funkcji f w punktach osobliwych

(i) $f(z) = \frac{x^2 - 2z}{(z-1)(z+1)},$

(ii) $f(z) = \frac{1}{z-z^3}.$

D.9.4. Udowodnić, że jeżeli f jest holomorficzną w punkcie z_0 , to funkcja g określona wzorem

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & \text{gdy } z \neq z_0, \\ f'(z_0), & \text{gdy } z = z_0, \end{cases}$$

ma w punkcie z_0 osobliwość pozorną (jest w punkcie z_0 holomorficzną).

D.9.5. Obliczyć całki

(i)

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{\sin z},$$

gdzie $\gamma(t) = 5 \cos t + 3i \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (Uwaga indeks krzywej γ względem każdego z trzech[!] punktów osobliwych jest równy 1 – porównaj wykład).

(ii) $\int_{|z|=3} \operatorname{ctg} z \, dz.$

(iii) $\int_{|z-3|=15} \frac{z^2+1}{z-2} dz,$

(iv) $\int_{|z|=1} \sin \frac{1}{z} dz.$

D.9.6. Scharakteryzować rodzaj osobliwości funkcji $f(z) = z \cos(1/(z-1))$ w punkcie $z_0 = 1$ oraz oblicz $\operatorname{res}(f, 1)$ oraz

$$\int_C z \cos \frac{1}{z-1} dz,$$

gdzie C jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w punkcie 0 i promieniu 2.

10. Zastosowanie twierdzenia o residuach

10.1. Korzystając z twierdzenia o residuach pokazać, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

10.2. Obliczyć

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n} \theta d\theta,$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$.

10.3. Policzyc transformatę Hilberta dla funkcji $f(x) = \cos x$ oraz $g(x) = \sin x$.

10.4. Obliczyć

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania**D.10.1.** Znaleźć wartość całki

(i)

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}.$$

(ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^2 + 2}.$$

(iii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^6 + 1}.$$

(iv)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^5-1} dx.$$

(v)

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta}.$$

(vi)

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{3 + 2 \cos \theta}.$$

(vii)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b \cos \theta)^2}.$$

(viii)

$$\int_0^{2\pi} (\cos \theta)^n d\theta.$$

(ix)

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + k^2} dx, \quad a, k > 0.$$