

Część 1

1.1. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji f danej wzorem

- (i) $f(x) = \sin x - \cos x$;
- (ii) $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x}$;
- (iii) $f(x) = |x^2 - x|$.

1.2. Na dwa sposoby obliczyć

$$\int (x-2)^2 dx.$$

Za pierwszym razem wykonać mnożenie i skorzystać z własności całki – za drugim razem dokonać odpowiedniego podstawienia.

1.3. Stosując odpowiednie podstawienie obliczyć całkę $\int f(x) dx$, jeśli

- (i) $f(x) = \cos \frac{x}{3}$;
- (ii) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$;
- (iii) $f(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x}$;
- (iv) $f(x) = x\sqrt{x-1}$.

1.4. Obliczyć $\int f(x) dx$, jeśli

- (i) $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+3}$;
- (ii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}}$.

1.5. Stosując metodę *całkowania przez części* obliczyć

- (i) $\int x \sin x dx$;
- (ii) $\int x^2 e^x dx$;
- (iii) $\int \ln x dx$;
- (iv) $\int e^x \sin x dx$.

1.6. Obliczyć całkę

- (i) $\int \frac{1}{2x^2+9x-5} dx$,
- (ii) $\int \frac{1}{x^2+4} dx$,
- (iii) $\int \frac{1}{2x^2-12x+27} dx$,
- (iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}$,
- (v) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4-5x}}$,

$$(vi) \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x+1},$$

$$(vii) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}},$$

$$(viii) \int \frac{2x+1}{\sqrt{2+x-3x^2}} dx,$$

$$(ix) \int \sqrt{x^2-2x+5} dx,$$

$$(x) \int \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} dx.$$

Zadania dodatkowe

1.7. Stosując odpowiednie podstawienie obliczyć całkę $\int f(x) dx$, jeśli

- (i) $f(x) = \frac{\cos \ln x}{x}$;
- (ii) $f(x) = \frac{e^{3x}}{1+e^{6x}}$;
- (iii) $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+3}$;
- (iv) $f(x) = \frac{1}{x^2+2x-3}$;
- (v) $f(x) = \frac{x^3}{1+x^4}$;
- (vi) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;
- (vii) $f(x) = \operatorname{tg} x$;
- (viii) $f(x) = x \sin x^2$.

1.8. Stosując metodę *całkowania przez części* obliczyć

- (i) $\int x^8 \ln x dx$;
- (ii) $\int \operatorname{arctg} x dx$,
- (iii) $\int x^2 \sin x dx$;
- (iv) $\int x \ln^2 x dx$;
- (v) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$;
- (vi) $\int x e^{-x} dx$;
- (vii) $\int x e^{-2x} dx$;
- (viii) $\int \sin x \ln \cos x dx$;
- (ix) $\int \sin \ln x dx$.

D.1.1. Obliczyć całkę

- (i) $\int \frac{1}{x^2-2x-1} dx$,
- (ii) $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10} dx$,
- (iii) $\int \frac{dx}{2x-3x^2}$,
- (iv) $\int \frac{2x+6}{2x^2+3x+1} dx$,

- (v) $\int \frac{7x}{4+5x^2} dx$,
- (vi) $\int (2x+1)^3 dx$,
- (vii) $\int \sqrt{2x+1} dx$,
- (viii) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+4x}}$,
- (ix) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-4}}$,
- (x) $\int \frac{x dx}{\sqrt[4]{2x+3}}$,
- (xi) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} \cdot \frac{dx}{(x-1)^2}$,
- (xii) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}$,
- (xiii) $\int \frac{8x+3}{\sqrt{4x^2+3x+1}} dx$,
- (xiv) $\int \frac{x}{\sqrt{1-2x-3x^2}} dx$,
- (xv) $\int \frac{x+a}{\sqrt{x^2-ax}} dx$,
- (xvi) $\int \sqrt{2x+x^2} dx$.

Część 2

1.9. Obliczyć całki

- (i) $\int \sin^5 x dx$,
- (ii) $\int \sin 2x \cos 4x dx$,
- (iii) $\int \sin^4 x dx$,
- (iv) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$,
- (v) $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$,
- (vi) $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$,
- (vii) $\int \frac{1}{\sin x} dx$,
- (viii) $\int \frac{dx}{2+\cos x}$

Zadania dodatkowe

D.1.2. Obliczyć całkę

- (i) $\int \cos 5x \cos 7x dx$,
- (ii) $\int \cos^5 x dx$,
- (iii) $\int \sin x \operatorname{tg} x dx$,
- (iv) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx$,
- (v) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$,
- (vi) $\int \sin x \cos 3x dx$,

- (vii) $\int \frac{\cos x}{\sin^8 x} dx$,
- (viii) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin^4 x}} dx$,
- (ix) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$,
- (x) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$,
- (xi) $\int \cos x \cos 5x dx$.

Część 3

1.10. Motorówka porusza się od przystani ruchem prostoliniowym z przyspieszeniem danym wzorem $a(t) = 12t - 4 \text{ m/s}^2$ zależnym od czasu t . W czasie $t = 0$, łódź miała prędkość 8 m/s i była 15 metrów od przystani. Znaleźć funkcję drogi przebytej przez łódź w zależności od czasu.

1.11. Obliczyć całkę Riemanna $\int_a^b f(x) dx$, gdzie

- (i) $f(x) = x^3 - x + 1$, $a = -1$, $b = 1$,
- (ii) $f(x) = x \sin x$, $a = 0$, $b = \pi/2$,
- (iii) $f(x) = \sin^2 x \cos x$, $a = 0$, $b = \pi/2$.

1.12. Znaleźć obszar ograniczony wykresami funkcji f i g (oraz h), gdzie:

- (i) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$,
- (ii) $f(x) = -x^2 + 6$, $g(x) = -2x + 3$,
- (iii) $f(x) = x + 6$, $g(x) = x^3$ oraz $h(x) = -\frac{x}{2}$.

1.13. Wyprowadzić wzór na objętość stożka.

1.14. Znaleźć objętość figury powstającej z obrotu fragmentu paraboli $y = x^2 + 1$ między punktami $x = -1$, $x = 1$ względem osi OX . Wykonać rysunek.

1.15. Wyliczyć objętość figury powstałej z obrotu wykresu funkcji $y = x^3$ (między prostymi $y = 1$ oraz $y = 8$) względem prostej OY .

1.16. Znaleźć długość wykresu paraboli $x \mapsto x^2$ leżącego między punktami $(-1, 1)$ oraz $(3, 9)$.

Zadania dodatkowe

D.1.3. Obliczyć całkę Riemanna $\int_a^b f(x) dx$, gdzie

(i) $f(x) = \sin^2 x \, dx$, $a = 0$, $b = \pi/4$,

(ii) $f(x) = \frac{3x-1}{3x+1}$, $a = 0$, $b = 2$,

(iii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$, $a = -2$, $b = 1$.

D.1.4. Znaleźć obszar ograniczony wykresami funkcji f i g (oraz h), gdzie:

(i) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = -x^2$, $x = 1$, $x = 2$,

(ii) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = -x$, $x = 1$, $x = 4$,

(iii) $f(x) = -x + 3$, $g(x) = -x^2 + 3$,

(iv) $f(x) = x\sqrt{x^2 - 9}$, $g(x) = 0$, $x = 5$.

D.1.5. Znaleźć objętość figury powstającej z obrotu wykresu funkcji $y = \frac{1}{x}$, między punktami $x = 1$, $x = 3$ względem osi OX . Wykonać rysunek.

D.1.6. Znaleźć objętość figury powstającej z obrotu wykresu funkcji $y = \sqrt{x}$, między punktami $x = 0$, $x = 4$ względem osi OX . Wykonać rysunek.

D.1.7. Wyliczyć objętość figury powstałej z obrotu obszaru ograniczonego wykresami funkcji $y = x^2$ oraz $y = 2$ względem prostej OY .

D.1.8. Wyliczyć objętość figury powstałej z obrotu obszaru ograniczonego wykresami krzywych $y = \cos \frac{1}{2}x$ oraz $y = 2$, $x = 0$, $x = 4\pi$ względem prostej $y = 2$.

D.1.9. Wyliczyć objętość figury powstałej z obrotu obszaru ograniczonego wykresami krzywych $x^2 = y - 2$ oraz $2y - x - 2 = 0$, $x = 0$, $x = 1$ względem prostej OX .

D.1.10. Niech $(y + 1)^2 = (x - 4)^3$. Znaleźć długość wykresu funkcji między punktami $A(5, 0)$ oraz $B(8, 7)$.

D.1.11. Niech $f(x) = -\frac{1}{4x} - \frac{x^3}{3}$. Znaleźć długość wykresu funkcji między punktami $A(2, \frac{67}{24})$ oraz $B(3, \frac{109}{12})$.

Część 4

1.17. Obliczyć z definicji całkę Riemanna

(i) $\int_a^b dx$,

(ii) $\int_a^b x \, dx$.

1.18. Uzasadnić, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nie jest całkowalna na przedziale $[0, 1]$.

1.19. Pokazać, że funkcja $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, \quad (p, q) = 1. \end{cases}$$

jest całkowalna w sensie Riemanna oraz

$$\int_1^2 f(x) \, dx = 0.$$

1.20. Korzystając z twierdzenia o podstawianiu dla całki Riemanna obliczyć

$$\int_0^{5\pi} \frac{\sin t}{2 + \cos t} \, dt.$$

1.21. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części dla całki Riemanna obliczyć

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx.$$

1.22. Niech $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x + 1, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Obliczyć

$$F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$$

i sprawdzić, że F jest ciągła na $[0, 2]$.

1.23. Niech $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2} + 1, & \frac{\pi}{2} < x \leq 2. \end{cases}$$

Obliczyć

$$F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$$

i sprawdzić, że F jest różniczkowalna na $[0, 2]$.

Część 5

1.24. Zbadać zbieżność i bezwzględną zbieżność całki

Zadania dodatkowe

- (i) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x}},$
- (ii) $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 + 4} dx,$
- (iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx,$
- (iv) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx,$
- (v) $\int_{-2}^7 \frac{1}{(x + 1)^{2/3}} dx,$
- (vi) $\int_1^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx,$
- (vii) $\int_0^1 \frac{1 + \sin x}{\sqrt{x}} dx,$
- (viii) $\int_0^4 \frac{1}{(x - 3)^2} dx,$
- (ix) $\int_{-1}^1 \ln(x + 1) dx,$
- (x) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx.$

1.25. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej w zależności od parametru p

(i)

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p},$$

(ii)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx.$$

1.26. Zbadać zbieżność i bezwzględną zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

1.27. Niech $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ oraz $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Obliczyć

$$\int_{-2/\pi}^0 f(x) dx.$$

D.1.12. Zbadać zbieżność i bezwzględną zbieżność całki

- (i) $\int_2^{\infty} \frac{1}{(x - 1)^2} dx,$
- (ii) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x - 1} dx,$
- (iii) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{4/3}} dx,$
- (iv) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x - 1)^3} dx,$
- (v) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/4}} dx,$
- (vi) $\int_0^{\infty} \frac{x}{1 + x^2} dx,$
- (vii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^4 + 9} dx,$
- (viii) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx,$
- (ix) $\int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 x dx,$
- (x) $\int_{-\infty}^{\pi/2} \sin 2x dx,$
- (xi) $\int_0^4 \frac{1}{(x - 3)^2} dx,$
- (xii) $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx,$
- (xiii) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx,$
- (xiv) $\int_0^1 x \ln x dx,$
- (xv) $\int_0^9 \frac{x}{\sqrt[3]{x - 1}} dx,$
- (xvi) $\int_0^4 \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx,$
- (xvii) $\int_{\pi}^{\infty} x \sin x dx,$
- (xviii) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx,$
- (xix) $\int_0^{\infty} \frac{\sin 3x}{e^{2x} + 1} dx,$
- (xx) $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}},$

$$(xxi) \int_2^4 x \sqrt{\frac{x-2}{4-x}} dx,$$

$$(xxii) \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 2x} dx,$$

$$(xxiii) \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx.$$

D.1.13. Znaleźć pole obszaru leżącego pod wykresem funkcji $y = e^x$ dla $x \leq 1$.

D.1.14. Obliczyć pole obszaru leżącego pod wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ dla $0 \leq x \leq 9$.

Część 6

1.28. Obliczyć całkę Riemanna–Stieltjesa

$$\int_0^1 x dx^2.$$

1.29. Obliczyć całkę Riemanna–Stieltjesa

$$\int_0^2 \sin x dg(x),$$

gdzie

$$g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

1.30. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu całki Riemanna–Stieltjesa przez części, obliczyć

$$\int_0^{\pi/2} x d \sin x.$$

1.31. Obliczyć

$$\int_1^2 x^2 d \sin x.$$

1.32. Obliczyć

$$\int_0^\infty x de^{-x}.$$

1.33. Obliczyć

$$\int_0^\infty x d \sin x.$$

1.34. Obliczyć

$$\int_{-1}^3 x^2 dg(x),$$

gdzie

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = -1, \\ 1, & -1 < x < 2, \\ -1, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Zadania dodatkowe

1.35. Obliczyć całkę Riemanna–Stieltjesa

$$\int_0^2 f dg,$$

gdzie

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

natomiast f jest ciągła w punkcie 1.

1.36. Zakładając, że $\int_a^b f df$ istnieje, obliczyć tę wartość.

D.1.15. Obliczyć

$$(i) \int_0^1 x^3 d \arctg x,$$

$$(ii) \int_0^\pi \sin^2 x de^{2x},$$

$$(iii) \int_0^1 x^2 dx^2,$$

$$(iv) \int_0^1 x dx^3,$$

$$(v) \int_0^\pi \sin x d \cos x,$$

$$(vi) \int_0^\pi \cos x d \sin x.$$

D.1.16. Obliczyć

$$(i) \int_0^\infty x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right),$$

$$(ii) \int_{-\infty}^\infty e^{-|x|} d \cos x,$$

$$(iii) \int_{-\infty}^\infty \sin x dx^2.$$

Część 7

Zadania dodatkowe

1.37. Obliczyć granicę ciągu liczb zespolonych

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (4n + n^2 i) / (5n^2 - 2i),$
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (4 + 2n^2 + 5in) / (1 - 4n + n^2 - in^2).$

1.38. Zbadaj zbieżność szeregów

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2 + i},$
 (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+i}{4}\right)^n.$

1.39. Wyznaczyć część rzeczywistą i część urojoną poniższych funkcji. Czy f jest ciągła?

- (i) $f(z) = z^2,$
 (ii) $f(z) = \operatorname{Re}(z)/z.$

1.40. Uzasadnić, że $f(t) = \cos t - it^2$ jest ciągła na $\mathbb{R}$.

1.41. Pokazać, że funkcja $z \mapsto \bar{z}$ jest ciągła na $\mathbb{C}$.

1.42. Z badać, czy istnieje funkcja ciągła $\Gamma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ taka, że $\Gamma|_{\mathbb{C} \setminus \{0\}} = f$, gdzie

- (i) $f(z) = z/|z|,$
 (ii) $(z \operatorname{Re}(z))/|z|.$

1.43. Narysować zbiór wartości funkcji

- (i) $t \mapsto (1 - i)t + 4i(1 - t), t \in [0, 1];$
 (ii) $t \mapsto \cos t + i \sin t, t \in [0, 2\pi].$

1.44. Obliczyć całki

- (i)

$$\int_{-1}^2 (t^2 + it) dt,$$

 (ii)

$$\int_0^{2\pi} e^{it} dt.$$

D.1.17. Stwierdzić kiedy kwadrat liczby zespolonej jest liczbą

- (i) rzeczywistą,
 (ii) ujemną,
 (iii) tylko urojoną?

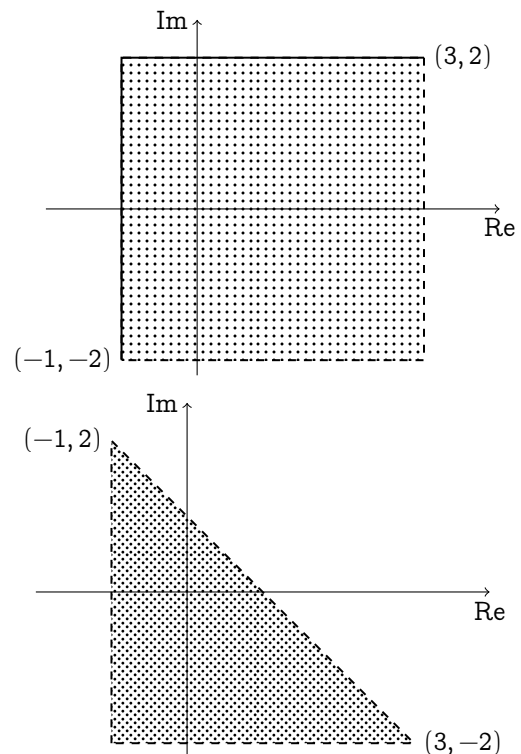
D.1.18. Doprowadzić do postaci $a + ib$ liczby zespolone

- (i) $(1 - 13i)/(1 - 3i),$
 (ii) $\sqrt{-5 - 12i},$
 (iii) $\frac{(1+2i)^2}{3i-4}.$

D.1.19. Narysować zbiór tych punktów płaszczyzny zespolonej, które spełniają warunek:

- (i) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < \operatorname{Re}(z) < 2\},$
 (ii) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - i| = \sqrt{2}\},$
 (iii) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - 2i| = \operatorname{Re}(z) + 1\},$
 (iv) $\{z \in \mathbb{C} : z = \bar{z}\}.$

D.1.20. Za pomocą liczb zespolonych opisać poniższe zbiory



D.1.21. Obliczyć

$$(-\sqrt{3} + i)^{32}.$$

D.1.22. Znaleźć sumę kątów α, β, γ , gdzie kąty te są argumentami liczb zespolonych odpowiednio $1 + i, 2 + i, 3 + i$.

D.1.23. Doprowadzić do postaci $a + ib$ liczby zespolone $1/(4 + 3i), \sqrt{-6}, \sqrt{i}$.

D.1.24. Narysować zbiory punktów $\{z \in \mathbb{C} : 1 < \operatorname{Im}(z) < 2\}, \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = |z - b|, a \neq b, a, b \in \mathbb{R}\}, \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z)\}, \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(iz) < 1\}$.

D.1.25. Podać w postaci $a + bi$ liczby

$$\frac{(1 + i)^{31}}{(1 - i\sqrt{3})^{13}}, \quad \frac{(1 - i)^{23}}{(\sqrt{3} + i)^{10}}.$$

D.1.26. Zbadać zbieżność ciągów (jeśli to możliwe policz granice) lub szeregów

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + i}{5n - 4i}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4 + 3i}{5} \right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + 3i)^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - i)^n} \cdot f_n(x) = \frac{x^2}{1 + nx^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

D.1.27. Rozwiązać równanie

$$(i) \quad z^2 + z + 1 = 0;$$

$$(ii) \quad z^2 + z - i - 3 = 0.$$

D.1.28. Wyznaczyć część rzeczywistą i część urojoną funkcji $f(z) = z|z|$.

D.1.29. Czy następujące granice istnieją

$$(i) \quad \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - \bar{z}}{1 - z};$$

$$(ii) \quad \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{1 + \bar{z}}.$$

D.1.30. Obliczyć

$$(i) \quad \lim_{z \rightarrow 2+i} \frac{z^2 - 4z + 5}{z^3 - z - 10i};$$

$$(ii) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z}.$$

D.1.31. Niech

$$P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}.$$

Uzasadnić, że $P(z) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P(\bar{z}) = 0$.

1.45. Uzasadnić, że każdy wielomian rzeczywisty stopnia nieparzystego ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Część 8

1.46. Znaleźć funkcję, do której zbieżny jest ciąg $\{f_n\}$. Sprawdzić, czy f_n jest zbieżny jednostajnie do f .

$$(i) \quad f_n(x) = \frac{\sin x}{n}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(ii) \quad f_n(x) = (1 + e^{-nx})x, \quad x \in [0, 1];$$

$$(iii) \quad f_n(x) = \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(iv) \quad f_n(x) = \frac{n \sin x}{n + \sin x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.47. Zbadać rodzaj zbieżności ciągu funkcji

$$(i) \quad f_n(x) = \frac{x^n}{x^n + 1}, \quad x \geq 0;$$

$$(ii) \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k, \quad x \in [0, 1];$$

$$(iii) \quad f_n(x) = \frac{x^2}{1 + nx^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.48. Pokazać, że ciąg funkcyjny $f_n: [-c, c] \rightarrow \mathbb{R}$ dany wzorem $f_n(x) = x^n$ jest zbieżny jednostajnie, jednakże nie jest zbieżny ciąg pochodnych $\{f'_n\}$.

Zadania dodatkowe

D.1.32. Znaleźć granicę ciągu funkcyjnego

$$(i) \quad f_n(x) = (1 + e^{-nx})x, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$(ii) \quad f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \quad x \in [0, 1];$$

$$(iii) \quad f_n(x) = n^2 x^n (1 - x), \quad x \in [0, 1];$$

$$(iv) \quad f(x) = x^n, \quad x \in [0, 1];$$

$$(v) \quad f_n(x) = \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

D.1.33. Zbadać rodzaj zbieżności ciągu funkcji

$$(i) \quad f_n(x) = \frac{x^n}{x^n + 1}, \quad x \geq 0;$$

$$(ii) \quad f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1];$$

$$(iii) \quad f_n(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right), \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(iv) \quad f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right), \quad x \in \mathbb{R};$$

(v) $f_n(x) = nxe^{-nx}$, $x \in \mathbb{R}$.

Część 9

1.49. Podać obszar zbieżności szeregów:

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + x^n}{1 + 3^n x^n},$$

(ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + x^n}.$$

(iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^x.$$

1.50. Zbadać rodzaj zbieżności szeregu

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2};$$

(ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{e^{nx}},$$

(iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1 + nx)}{nx^n}, \quad x \in [2, \infty),$$

(iv)

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2(1 - x^2)^{n-1}, \quad x \in [-1, 1].$$

1.51. Pokazać, że szereg $\sum f_n(x)$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n+1} \\ 0, & \frac{1}{2n-1} \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{1}{2n}, \end{cases}$$

ponadto $f_n(x)$ jest funkcją liniową na przedziałach $[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}]$, $[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]$, jest jednostajnie zbieżny na $[0, 1]$. Czy można stosować kryterium Weierstrassa?

1.52. Pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$ jest zbieżny jednostajnie na $0 \leq |x| \leq C$ (dla każdego $0 < C < 1$).

1.53. Pokazać, że

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

jest funkcją różniczkowalną na $\mathbb{R}$.

1.54. Pokazać, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in [0, 1]$$

jest zbieżny jednostajnie.

1.55. Niech

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Obliczyć

$$\int_0^{\infty} f(x) dx.$$

Zadania dodatkowe

D.1.34. Podać obszar zbieżności szeregu

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^n}, \quad x \neq 1,$$

(ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{\ln n}, \quad x > 0.$$

D.1.35. Niech $f_n: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f_n(x) = \begin{cases} n \sin nx, & x \leq \frac{\pi}{n}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{n}. \end{cases}$$

Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(x) dx \quad \text{oraz} \quad \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

D.1.36. Zbadać rodzaj zbieżności ciągu

$$(i) f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1], \\ nx - n, & x \in (1, 1 + \frac{1}{n}), \\ 1, & x \in [1 + \frac{1}{n}, 2], \end{cases}$$

$$(ii) f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

D.1.37. Zbadać rodzaj zbieżności szeregu

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1} \sqrt{1+nx}};$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x^2} n^2;$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx};$$

$$(iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!};$$

$$(v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{e^n x}.$$

D.1.38. Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2 x}$. Pokazać, że szereg ten jest zbieżny jednostajnie dla $x \geq c > 0$.

Część 10

1.56. Podać promień zbieżności oraz sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

1.57. Jakie jest przedział zbieżności następujących szeregów potęgowych?

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x+5)^n;$$

$$(ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n!};$$

$$(iii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n;$$

$$(iv) \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n)^n (x-5)^n;$$

$$(v) \sum_{n=0}^{\infty} n! (x-6)^n.$$

1.58. Rozważyć zbieżność szeregów potęgowych w punktach ± 1 :

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} x^n;$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2};$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

1.59. Niech szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ będzie miał promień zbieżności 1. Jaki promień zbieżności ma szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^d x^n, \quad \text{gdzie } d \in \mathbb{N}?$$

Zadania dodatkowe

D.1.39. Podać promień zbieżności oraz sumy następujących szeregów

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n};$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n.$$

D.1.40. Jakie jest przedział zbieżności następujących szeregów potęgowych?

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{2^n};$$

$$(ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n (x-2)^{2n}}{n!};$$

$$(iii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n;$$

$$(iv) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+3} (x-5)^n;$$

$$(v) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n}{n} (x-6)^n;$$

$$(vi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n^2+3} x^n;$$

$$(vii) \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{n\pi}{4} (x-\pi)^n.$$

D.1.41. Niech szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ będzie miał promień zbieżności 1. Jaki promień zbieżności ma szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^d}, \quad \text{gdzie } d \in \mathbb{N}?$$

Część 11

1.60. Rozwinąć funkcję $f(x) = \ln x$ w szereg Taylora o środku w $x_0 = 2$.

1.61. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję

$$f(x) = (1+x)^q, \quad q \in \mathbb{N}.$$

1.62. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję

$$f(x) = \sin x.$$

1.63. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję

$$f(x) = e^x.$$

$$(ii) f(x) = \frac{x-2}{x+3}, x_0 = 2,$$

$$(iii) f(x) = \ln(x+1), x_0 = 0,$$

$$(iv) f(x) = \cos x, x_0 = 0,$$

$$(v) f(x) = \cos x, x_0 = \pi/2,$$

$$(vi) f(x) = e^{x-2}, x_0 = 1.$$

Część 12

1.64. Rozwinąć w szereg Taylora o środku w $x_0 = 3$ funkcję

$$f(x) = \frac{1}{x+5}.$$

1.65. Rozwinąć w szereg Taylora o środku w $x_0 = 3$ funkcję

$$f(x) = \frac{1}{(x+5)^2}.$$

1.66. Rozwinąć funkcję

$$f(x) = \log(1-x)$$

w szereg Taylora w $x_0 = 0$.

1.67. Niech

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pokazać, że funkcja jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna, jednak jej szereg Taylora (z $x_0 = 0$) nie jest zbieżny do f .

1.68. Przedyskutować – w kontekście twierdzenia Abela – zbieżność szeregów potęgowych

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n,$$

w punkcie $x = 1$.

Zadania dodatkowe

D.1.42. Rozwinąć następujące funkcje w szereg Taylora o środku w x_0 .

$$(i) f(x) = \frac{x}{(x-2)(x+2)}, x_0 = 0,$$

1.69. Rozwin w szereg Fouriera funkcję $f(x) = x$. Przedyskutować zbieżność szeregu do funkcji. Korzystać z znanego rozwinięcia obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

1.70. Rozwin w szereg Fouriera w postaci zespolonej funkcję $f(x) = x^2$. Korzystać z tego rozwinięcia obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^n}.$$

1.71. Rozwin w szereg Fouriera funkcję $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

w przedziale $[-\pi, \pi]$ względem sinusów.

1.72. Uzasadnić, że jeśli funkcja $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek $f(x + \pi) = -f(x)$, to wyrazy szeregu Fouriera o wyrazach parzystych znikają.

1.73. Rozwin w szereg Fouriera w przedziale $(-5, 5)$ funkcję $f(x) = |x - 5| + 5$.

1.74. Znaleźć współczynniki Fouriera funkcji $f(x) = x(x - \pi)$.

1.75. Jak wygląda rozwinięcie w szereg Fouriera funkcji $f(x) = \sin x$?

Zadania dodatkowe

D.1.43. Rozwin funkcję $f(x) = x^2 - 2x + 1$ w szereg Fouriera

- (i) na przedziale $(-\pi, \pi)$;
- (ii) wzgl dem sinusów;
- (iii) wzgl dem kosinusów;
- (iv) na przedziale $(-2, 2)$.

D.1.44. Rozwin w szereg Fouriera funkcj $f(x) = |x|$ w przedziale $[-2, 2]$.

D.1.45. Rozwin w szereg Fouriera funkcj $f(x) = x^2$. Przedyskutowa zbie no szeregu do funkcji. Korzystaj c ze znalezione go rozwini cia obliczy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

D.1.46. Rozwin w szereg Fouriera w przedziale $[-\pi, \pi]$ funkcj

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \leq x < \pi, \\ \frac{\pi}{2}, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

Poda posta rzeczywist i zespolon jej szeregu Fouriera.

D.1.47. Udowodni , e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

D.1.48. Funkcja f ca kowalna i okresowa o okresie 2π spe nia warunek $f(x+\pi) = f(x)$. Pokaza , e jej nieparzyste wspo czynniki Fouriera s równe zeru.

D.1.49. Funkcja f , 2π okresowa spe nia warunki: $f(-x) = -f(x)$ oraz $f(x+\pi) = f(x)$. Co mo na powiedzie o jej wspo czynnkach Fouriera?

1.76. Wyznaczy wspo czynniki Fouriera (w postaci zespolonej i rzeczywistej) funkcji $f(x) = 2x - \pi$ w rozwini ciu wzgl dem sinusów i kosinusów.

D.1.50. Rozwin w szereg Fouriera funkcje:

- (i) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in [-\pi, \pi]$;
- (ii) $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$.

D.1.51. Obliczy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

CZĘŚĆ 13

1.77. Uzasadnić, że funkcja $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ dana wzorem

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y \end{cases}$$

jest metryką na $\mathbb{R}$. Narysowa kule o promieniu $\frac{1}{2}$ i 2.

1.78. Czy funkcja $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ dana wzorem

$$d(x, y) = |x - 2y|$$

jest metryką na $\mathbb{R}$?

1.79. Niech $d: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ będzie dana wzorem

$$d(n, m) = \frac{|n - m|}{nm}.$$

Czy d jest metryka na $\mathbb{N}$? Narysowa kulę o środku w punkcie 2 i promieniu 3.

1.80. Uzasadnić, że funkcja $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ dana wzorem

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

jest metryką na $\mathbb{R}^2$. Narysowa kulę o środku w 0 i promieniu 1.

1.81. Uzasadnić, że funkcja $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ dana wzorem

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$$

jest metryką na $\mathbb{R}^2$. Narysowa kulę o środku w 0 i promieniu 1.

1.82. Uzasadnić, że w każdej przestrzeni metrycznej kula otwarta jest zbiorem otwartym.

1.83. Niech (X, d) będzie przestrzenią z metryka dyskretną. Czy

$$\overline{\{x \in X : d(x, 0) < 1\}} = \{x \in X : d(x, 0) \leq 1\}?$$

1.84. Niech (X, d_X) , (Y, d_Y) będą przestrzeniami metrycznymi, $A \subset X$. Uzasadnić, że jeśli $f, g: X \rightarrow Y$ są ciągłe oraz $f(x) = g(x)$ dla każdego $x \in A$, to

$$f(x) = g(x) \quad \text{dla każdego } x \in \overline{A}.$$

1.85. Uzasadnić, że jeśli funkcje ciągłe $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ spełniają warunek

$$f(x, y) = g(x, y) \quad \text{dla każdego } x, y \in \mathbb{Q},$$

to $f \equiv g$.

1.86. Czy $\mathbb{R}$ z metryką euklidesową jest przestrzenią zupełną? Czy taka sama odpowiedź jest dla $\mathbb{Q}$?

1.87. Uzasadnić, że norma $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ jest funkcją jednostajnie ciągłą.

1.88. Rozważmy zbiór $C[0, 1]$ funkcji ciągłych na odcinku $[0, 1]$. W $C[0, 1]$ definiujemy funkcje $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty: C[0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ wzorami

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx,$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

Pokazać, że obie są normami na $C[0, 1]$. Uzasadnić ponadto, że $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ jest przestrzenią zupełną, natomiast $(C[0, 1], \|\cdot\|_1)$ nią nie jest.

1.89. Niech d_∞, d_1 będą metrykami indukowanymi odpowiednio przez normy $\|\cdot\|_\infty$ oraz $\|\cdot\|_1$ na $C[0, 1]$. Obliczyć $d_1(f, g)$, $d_\infty(f, g)$ dla

$$(i) \quad f(x) = x, \quad g(x) = \cos x,$$

$$(ii) \quad f(x) = 4x^3, \quad g(x) = 6x^2 - 3x.$$

1.90. Niech $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, będzie klasy C^1 . Uzasadnić, że f spełnia warunek Lipschitza ze stałą c wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{x \in I} |f'(x)| \leq c.$$

1.91. Uzasadnij, że jeśli funkcja $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ jest ciągła, to f ma punkt stały, tzn. istnieje takie $x_0 \in [0, 1]$, że $f(x_0) = x_0$.

1.92. Uzasadnić, że funkcja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dana wzorem

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + 1, \frac{1}{3}y - 2\right)$$

ma dokładnie jeden punkt stały. Znaleźć ten punkt.

1.93. Rozwiązać równanie $x = \cos x$, $x \in [0, 1]$ z dokładnością do 0,1.

1.94. Uzasadnić, że poniższe funkcje nie mają punktu stałego. Które założenie w twierdzeniu Banacha o kontrakcji nie jest spełnione?

$$(i) \quad f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{2},$$

$$(ii) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 1,$$

$$(iii) \quad f: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (-y, x).$$