

CZĘŚĆ 1

1.1. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. Znaleźć przeciwobraz $f^{-1}([0, \infty))$.

1.2. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$. Znaleźć przeciwobraz $f^{-1}((-1, 0))$.

1.3. Wyznaczyć przeciwobraz zbioru $A = [0, 4]$ za pomocą funkcji $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, jeśli

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [0, 1], \\ 3x - 6, & x \in (1, 3] \end{cases}.$$

1.4. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem: $f(x) = 3x - 5$.

- (i) Sprawdzić, czy f jest suriekcją (czyli odwzorowaniem „na”).
- (ii) Sprawdzić, czy f jest iniekcją (czyli odwzorowaniem różnowartościowym).
- (iii) Jeżeli na powyższe pytania odpowiedź jest pozytywna (tzn. f jest bijekcją), to wyznaczyć funkcję f^{-1} odwrotną do f .

1.5. Niech $f: [-\pi, \pi] \rightarrow [\pi, \pi^2 + \pi]$ będzie określona wzorem $f(x) = x^2 + \pi$. Czy f jest bijekcją?

1.6. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x+2}, & x \neq -2, \\ 2, & x = -2. \end{cases}$$

- (i) Czy f jest bijekcją?
 - (ii) Jeżeli na powyższe pytanie odpowiedź jest pozytywna (tzn. f jest bijekcją), to wyznaczyć funkcję f^{-1} odwrotną do f .
- 1.7. Czy istnieje funkcja odwrotna do funkcji $\sin$? Co należy zrobić, aby taka funkcja istniała? (podobne rozumowanie przeprowadzić dla funkcji $\cos$, $\tan$ i $\cot$).

1.8. Niech $f(x) = x^2 - 4x + 8$. Podać związek między wyrażeniami $f^{-1}((1, 2))$ oraz $f^{-1}(1)$ i $f^{-1}(2)$.

1.9. Niech f, g będą dane wzorami:

(i) $f(x) = x - 2$, $g(x) = 5x + \sqrt{x}$,

(ii) $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 3x + 5$.

Jeśli to możliwe znaleźć $g \circ f$ oraz $f \circ g$.

1.10. Podać wzór funkcji $f \circ g$ oraz $g \circ f$ (jeśli to możliwe) będących złożeniem funkcji f i g , jeśli

(i)

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 1, \\ x^2 + x, & x \geq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

(ii)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ -x^2, & x > 0. \end{cases}$$

(iii)

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1/2], \\ 1, & x \in (1/2, 1] \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2], \\ -2x + 2, & x \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Zadania dodatkowe

D.1.1. Znaleźć

- (i) $f^{-1}((-2, 3))$, gdzie $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 6x$.
- (ii) $f^{-1}((-1, 1))$, gdzie $f(x) = \begin{cases} -x^2, & |x| \geq 1, \\ 1/2, & |x| < 1. \end{cases}$
- (iii) $f^{-1}([1, 2))$, gdzie $f(x) = |x^2 - 2x - 12|$.

D.1.2. Czy f jest suriekcją lub iniekcją, jeśli

- (i) $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$,
- (ii) $f(x) = f(x) = \begin{cases} -x^2, & |x| \geq 1, \\ 1/2, & |x| < 1. \end{cases}$
- (iii) $g(x) = \sin x$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$,
- (iv) $f(x) = |x^2 - 2x - 12|$.

D.1.3. Uzasadnić, że $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest bijekcją i znaleźć funkcję odwrotną, jeśli

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \in \mathbb{R}, x \neq -1, x \neq 0, \\ 3, & x = -1, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

D.1.4. Sprawdzić, czy funkcja $f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$, $a^2 + bc \neq 0$, jest odwrotna względem siebie.

D.1.5. Podać wzór funkcji $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$ oraz $g \circ f$ (jeśli to możliwe) będących złożeniem funkcji $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ i $g: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, jeśli

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 2^x.$$

D.1.6. Znaleźć wzór na $f \circ g$ oraz $g \circ f$, jeśli

(i) $f(x) = 2x^3 - x + 5$, $g(x) = x^2 + x + 2$;

(ii) $f(x) = \sqrt{2x+1}$, $g(x) = x^2 + 3$;

(iii) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = x + 1$;

(iv) $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$;

(v) $f(x) = \sqrt{x+3}$, $g(x) = \sqrt{x+3}$.

Część 2

1.11. Pokazać, że $\sqrt{3}$ jest liczbą niewymierną.

1.12. Uzasadnić, że $\sqrt{6}$ jest liczbą niewymierną.

1.13. Pokazać, że $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ jest liczbą niewymierną.

1.14. Podać przykład dwóch liczb niewymiernych, których suma jest liczbą wymierną.

1.15. Uzasadnić, że $\log_2 3$ jest liczbą niewymierną.

1.16. Pokazać, że liczba

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$$

jest wymierna.

1.17. Uzasadnić, że $\cos \pi/8$ jest liczbą niewymierną.

Zadania dodatkowe

D.1.7. Rozstrzygnąć, czy poniższe liczby są wymierne lub niewymierne.

1. $\log_{10} 2$;

2. $\sqrt{11-6\sqrt{2}} + \sqrt{11+6\sqrt{2}}$;

3. $\sqrt{3} + \sqrt{5}$;

4. $\sqrt{2}$;

5. $\sin \pi/8$

6. $\cos 3\pi/8$.

D.1.8. Podać przykład dwóch liczb niewymiernych, których iloczyn jest liczbą wymierną.

Część 3

1.18. Rozstrzygnąć, które z poniższych zbiorów są ograniczone:

1. $A = \{\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots\}$;

2. $B = \{x \sin x : x \geq 0\}$;

3. $C = \{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}\}$;

4. $D = \{\frac{m}{4n} + \frac{9n}{m} : m, n \in \mathbb{N}\}$;

5. $E = \{\log x : 0 < x \leq 1\}$;

6. $F = \{2 - |x| : x \in \mathbb{R}\}$;

7. $G = \{\frac{n^2+4n+8}{2+n^2} : n \in \mathbb{N}\}$;

8. $H = \{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} : n \in \mathbb{N}\}$;

9. $I = \{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} : n \in \mathbb{N}\}$.

Zadania dodatkowe

D.1.9. Rozstrzygnąć, które z poniższych zbiorów są ograniczone:

1. $\{\frac{2n^2-1}{2+n^2} : n \in \mathbb{N}\}$;

2. $\{\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j : n \in \mathbb{N}\}$;

3. $\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} : n \in \mathbb{N}\}$;

4. $\{\frac{7}{10}, \frac{77}{100}, \frac{777}{1000}, \dots\}$;

5. $\{\frac{\sqrt{2}}{k} - \frac{\sqrt{3}}{l} : k, l \in \mathbb{N}\}$;

6. $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 3 \geq 0\}$;

7. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5|x| + 4 \leq 0\}$.

Część 4

1.19. Policzyc kresy ponizszych zbiorow. Czy w podanych zbiorach jest element najwiekszy lub najmniejszy?

1. $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\};$
2. $B = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} : n \in \mathbb{N} \right\};$
3. $C = \left\{ \sin \frac{1}{x} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\};$
4. $D = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x^2 \geq \sqrt{3} \right\};$
5. $E = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{k} - \frac{\sqrt{3}}{l} : k, l \in \mathbb{N} \right\}.$

1.20. Niech $A, B \subset \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$ oraz

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Pokazac, ze $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

1.21. Niech $A, B \subset \mathbb{R}$ i $A, B \neq \emptyset$. Udowodnic, ze

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

Zadania dodatkowe

D.1.10. Niech $A, B \subset \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$ oraz

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Pokazac, ze $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

D.1.11. Niech $A, B \subset \mathbb{R}$ i $A, B \neq \emptyset$. Udowodnic, ze

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

D.1.12. Policzyc kresy ponizszych zbiorow:

1. $\left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^k} : n, k \in \mathbb{N} \right\};$
2. $\left\{ \frac{kn}{1+k+n} : n \in \mathbb{N} \right\};$
3. $\left\{ \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} : m, n \in \mathbb{N} \right\};$
4. $\left\{ x \in \mathbb{R} : x^2 - 5|x| + 4 \leq 0 \right\};$
5. $\left\{ \frac{7}{10}, \frac{77}{100}, \frac{777}{1000}, \dots \right\}.$

Część 5

1.22. Znajac kilka poczatkowych wyrazow ciagu, wyznaczyc jego wzor ogolny:

- (i) 1, 3, 7, 15, 31, ...;
- (ii) 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, ...

1.23. Napisać wyraz danego ciagu o wskazanym numerze:

- (i) $a_n = (2n + 1)!, a_{100};$
- (ii) $b_n = (n!)^{n+1}, b_{3^n}.$

1.24. Zbadac monotonicznosc i ograniczoność ciagow, których wyraz ogolny dany jest nastepujacym wzorem:

- (i) $a_n = \frac{n}{2^n};$
- (ii) $b_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n};$
- (iii) $c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$
- (iv) $d_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1};$
- (v) $e_n = \frac{1}{n^2 - 6n + 10}$

1.25. Niech $c > 2$ oraz niech $\{a_n\}$ bedzie ciagiem określonym rekurencyjnie:

$$a_1 = c^2, \quad a_{n+1} = (a_n - c)^2, \quad n \geq 1.$$

Wykazac, ze $\{a_n\}$ jest ściśle rosnący.

Zadania dodatkowe

D.1.13. Znajac kilka poczatkowych wyrazow ciagu, wyznaczyc jego wzor ogolny:

- (i) 0,7, 0,77, 0,777, 0,7777, ...;
- (ii) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, ...

D.1.14. Napisać wyraz danego ciagu o wskazanym numerze:

- (i) $a_n = 3^n + 3^{n+1} + \dots + 3^{2n}; a_{n^2};$
- (ii) $b_n = (n^2 + 1)^3, b_{2n-1}.$

D.1.15. Zbadac monotonicznosc i ograniczoność ciagow, których wyraz ogolny dany jest nastepujacym wzorem:

- (i) $a_n = \frac{(n+1)^2}{n^2-3};$

- (ii) $b_n = \frac{2^n n!}{n^n}$;
 (iii) $c_n = \frac{4^n}{2^n + 3^n}$;
 (iv) $d_n = \operatorname{tg} \frac{100\pi}{2n+1}$.

Część 6

1.26. Opierając się na definicji uzasadnić, że

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-n}{n+4} = -1$;
 (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$.

1.27. Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, jeśli:

- (i) $a_n = \frac{5n+3n^2}{1+n+2n^2}$;
 (ii) $a_n = \frac{1+n}{3-n^2}$;
 (iii) $a_n = \sqrt{n^4 + n^2} - \sqrt{n^4 - n^2}$;
 (iv) $a_n = \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$;
 (v) $a_n = \frac{4 \cdot 3^{n+1} + 2 \cdot 4^n}{5 \cdot 2^n + 4^{n+2}}$;
 (vi) $a_n = \frac{n \sin n!}{n^2 + 1}$;
 (vii) $a_n = \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n}$;
 (viii) $a_n = \sqrt[n]{n}$.

1.28. Uzasadnić, że dla dowolnej liczby wymiernej α , granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n! \alpha \pi)$ istnieje.

1.29. Udowodnić, że nie istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$.

1.30. Niech $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$, $q < 1$. Uzasadnić, że wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

1.31. Obliczyć granice

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100^n}{n!}$;
 (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n+2} \right)^{6n}$;
 (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{2n^2-3}$;
 (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^{n+1}$.

1.32. Sprawdzić, czy istnieje granica ciągu danego rekurencyjnie

$$a_1 = \sqrt{c}, \quad a_n = \sqrt{c + a_{n-1}}, \quad n \geq 2, \quad c > 0.$$

1.33. Obliczyć granice górną i dolną ciągu (a_n) . Stwierdzić, czy ciąg (a_n) jest zbieżny, jeśli

- (i) $a_n = (-1)^n$;
 (ii) $a_n = (-1)^n \left(2 + \frac{3}{n} \right)$.

1.34. Znaleźć punkty skupienia ciągu

$$a_n = \frac{(1 - (-1)^n)2^n + 1}{2^n + 3}.$$

1.35. Niech $a_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n} \right)$. Uzasadnić, że ciąg (a_n) nie jest zbieżny, ale zbieżny jest ciąg (a_n^2) .

1.36. Wykazać, że ciąg o wyrazie ogólnym

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos(k!)}{2^k}$$

jest zbieżny. (Pokazać, że $\{a_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego.)

Zadania dodatkowe

D.1.16. Opierając się na definicji, wyznaczyć granice następujących ciągów:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2+(-1)^n}{n} \right\} = 0$;
 (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n+1} \right\} = 1$;
 (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\sqrt{n+2} \right\} = -\infty$;
 (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log(\log n) \right\} = \infty$.

D.1.17. Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, jeśli:

- (i) $a_n = \frac{2n^2+3}{n^3+1}$;
 (ii) $a_n = \frac{1-2+3-4+\dots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}}$;
 (iii) $a_n = \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$;
 (iv) $a_n = \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n}$;
 (v) $a_n = \sqrt[n]{2 - \frac{(-1)^{n+1}+(-1)^{n+2}+\dots+(-1)^{2n}}{n}}$;
 (vi) $a_n = \sqrt[n]{1^{10} + 2^{10} + \dots + n^{10}}$.

(vii) $a_n = \sin \sqrt{n+1} - \sin \sqrt{n}$;

(viii) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$;

(ix) $a_n = \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}$;

(x) $a_n = \frac{2+\cos 5n}{1+\sin n}$;

(xi) $a_n = \sqrt[3]{3n + \sin n}$;

(xii) $a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$;

(xiii) $a_n = \sqrt[3]{2n^3 + 3n^2 - 1}$;

(xiv) $a_n = \frac{n^{10}}{2^{10}}$;

(xv) $a_n = \sqrt[3]{14n^2 + 2n + 6}$;

(xvi) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

D.1.18. Niech $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$, $q > 1$. Uzasadnić, że wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

D.1.19. Obliczyć granice:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n-2}$;

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{5-2n}$;

(iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^{6n}$;

(v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$;

(vi) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n}{4n+1}\right)^n$;

(vii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^{n+2n}}{5^{n+4n}}}$;

(viii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (7^n - 6^n - 5^n)$;

(ix) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{\sqrt{n}}$.

D.1.20. Pokazać, że ciąg określony rekurencyjnie

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 2}, \quad n \geq 2,$$

jest zbieżny i obliczyć jego granicę.

D.1.21. Obliczyć granice górną i dolną ciągu (a_n) . Stwierdzić, czy ciąg (a_n) jest zbieżny, jeśli

(i) $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$;

(ii) $a_n = (1 + \cos n\pi)n!$.

D.1.22. Znaleźć punkty skupienia ciągu

(i) $a_n = \sqrt[3]{4(-1)^n + 2}$;

(ii) $a_n = \left(\cos \frac{\pi n}{3}\right)^n$;

(iii) $a_n = \sin \pi n \alpha$, $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Część 7

1.37. Uzasadnić, że

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$;

(ii) $0,6(6) = \frac{2}{3}$.

1.38. Stwierdzić, że szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+1}$$

jest rozbieżny.

1.39. Uzasadnić, że szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$$

jest rozbieżny.

1.40. Czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{3^{n-1}} \right]$$

jest zbieżny?

Zadania dodatkowe

D.1.23. Znaleźć punkty skupienia ciągu

(i) $a_n = \sqrt[3]{4(-1)^n + 2}$;

(ii) $a_n = \left(\cos \frac{\pi n}{3}\right)^n$;

(iii) $a_n = \sin \pi n \alpha$, $\alpha \in \mathbb{Q}$.

D.1.24. Sprawdzić, czy poniższe szeregi są zbieżne. W przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznaczyć ich sumy. Sprawdzić, czy poniższe szeregi są szeregi są zbieżne. W przypadku odpowiedzi twierdzącej, znaleźć ich sumy.

(i) $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^{n-1}} + \dots$,

- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{1}{n},$
- (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{1}{n} \right),$
- (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} 3^{n-1},$
- (v) $3 + \frac{3}{4} + \dots + \frac{3}{4^{n-1}} + \dots,$
- (vi) $0,628 + 0,000628 + \dots + 628 \cdot 1000^{-n} + \dots,$
- (vii) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} 2^{n-1},$
- (viii) $\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \dots,$
- (ix) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} \right).$

Część 8

1.41. Korzystając z odpowiedniego kryterium rozstrzygnąć zbieżność poniższych szeregów o wyrazach nieujemnych:

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+5^n},$
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)},$
- (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n},$
- (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n},$
- (v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3},$
- (vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2^n}},$
- (vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \pi^n \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2},$
- (viii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}.$

1.42. Korzystając z kryterium Rabbego uzasadnić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

jest rozbieżny.

1.43. Korzystając z kryterium Cauchy'ego o zagęszczeniu rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

w zależności od wartości parametru α , $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.44. Uzasadnić, że jeśli $a_n \geq 0$, to ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

1.45. Korzystając z odpowiedniego kryterium rozstrzygnąć zbieżność poniższych szeregów:

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n}{4n-3},$
- (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctg n}{\sqrt{n}},$
- (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n-1}.$

1.46. Zbadać zbieżność oraz bezwzględną zbieżność poniższych szeregów:

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\alpha}{n}, \alpha \in (0, \pi/2),$
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n},$
- (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n-1)/2} \frac{n^{100}}{2^n},$
- (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n!}.$

1.47. Uzasadnić, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!}{n^{n+1}} = 0.$$

1.48. Przetwócić wyraży szeregu zbieżnego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

tak, aby otrzymać szereg rozbieżny.

1.49. Obliczyć sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$$

Zadania dodatkowe

D.1.25. Korzystając z odpowiedniego kryterium rozstrzygnąć zbieżność poniższych szeregów:

- (i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-1}$, (odp. rozbieżny)
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$, (odp. rozbieżny)
- (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n+\sqrt{n}}{5+n^3+n^{7/8}}$, (odp. zbieżny)
- (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+2n)^2}$, (odp. zbieżny)
- (v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+7}$, (odp. rozbieżny)
- (vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4+n)^{3/2}}$, (odp. zbieżny)
- (vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+n^2+1}$, (odp. zbieżny)
- (viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$, (odp. zbieżny)
- (ix) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n^2-7}{e^n(n+1)^2}$, (odp. zbieżny)
- (x) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2}$, (odp. zbieżny)
- (xi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n^2}$, (odp. zbieżny)
- (xii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n}$, (odp. zbieżny)
- (xiii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\ln n}{n^2+1}$, (odp. rozbieżny)

$$(xiv) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^3-5n}}, \quad (\text{odp. zbieżny})$$

$$(xv) \sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n^2}, \quad (\text{odp. zbieżny})$$

$$(xvi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{10^n}, \quad (\text{odp. rozbieżny})$$

$$(xvii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n^n}, \quad (\text{odp. zbieżny})$$

$$(xviii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2}{4n^2+5} \right)^n, \quad (\text{odp. rozbieżny})$$

$$(xix) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}, \quad (\text{odp. zbieżny})$$

$$(xx) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad (\text{odp. zbieżny})$$

$$(xxi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(5n+3n^{-1})^n}, \quad (\text{odp. zbieżny})$$

$$(xxii) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n, \quad (\text{odp. zbieżny})$$

$$(xxiii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}, \quad (\text{odp. rozbieżny})$$

D.1.26. Uzasadnić, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich i malejących jest zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.

D.1.27. Zbadać zbieżność oraz bezwzględną zbieżność poniższych szeregów:

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$, (odp. nie jest bezwzględnie zbieżny; zbieżny)
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$, (odp. rozbieżny)
- (iii) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{1}{n}$, (odp. zbieżny, nie jest bezwzględnie zbieżny)
- (iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n^2}$, (odp. bezwzględnie zbieżny)
- (v) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$, (odp. zbieżny, nie jest bezwzględnie zbieżny)
- (vi) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2n}{3n+5} \right)^n$, (odp. bezwzględnie zbieżny)

$$(vii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n + 1}, \quad (\text{odp. bezwzględnie zbieżny})$$

$$(viii) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1). \quad (\text{odp. bezwzględnie zbieżny})$$

D.1.28. Uzasadnić, że

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{1000^n} = 0,$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)(2n)!}{(3n)!} = 0.$$

D.1.29. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad |x| < 1.$$