0.1. Wykresy nierówności i układów nierówności

Teoria

Każdą prostą na płaszczyźnie, niebędącą prostą pionową, można określić za pomocą tak zwanego równania kierunkowego tzn. równania postaci $y = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

1^o. Nierówność $y > ax + b$ określa półpłaszczyznę otwartą, utworzoną przez punkty leżące nad prostą $y = ax + b$.

2^o. Nierówność $y < ax + b$ określa półpłaszczyznę otwartą, utworzoną przez punkty leżące pod prostą $y = ax + b$.

3^o. Nierówność $y \geqslant ax+b$ określa półpłaszczyznę domkniętą, utworzoną przez punkty leżące nad prostą $y = ax + b$ i na tej prostej.

4^o. Nierówność $y \leqslant ax+b$ określa półpłaszczyznę domkniętą, utworzoną przez punkty leżące pod prostą $y = ax + b$ i na tej prostej.

Każdą prostą pionową na płaszczyźnie można określić za pomocą równania postaci $x = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

1^o. Nierówność $x > a$ określa półpłaszczyznę otwartą utworzoną przez punkty leżące na prawo od prostej $x = a$.

2^o. Nierówność $x < a$ określa półpłaszczyznę otwartą, utworzoną przez punkty leżące na lewo od prostej $x = a$.

3^o. Nierówność $x \geqslant a$ określa półpłaszczyznę domkniętą, utworzoną przez punkty leżące na prawo od prostej $x = a$ i na tej prostej.

4^o. Nierówność $x \leqslant a$ określa półpłaszczyznę domkniętą, utworzoną przez punkty leżące na lewo od prostej $x = a$ i na tej prostej.

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Wówczas:

1^o. Nierówność $y > f(x)$ określa zbiór punktów płaszczyzny, leżących nad wykresem funkcji $y = f(x)$.

2^o. Nierówność $y < f(x)$ określa zbiór punktów płaszczyzny, leżących pod wykresem funkcji $y = f(x)$.

3^o. Nierówność $y \geqslant f(x)$ określa zbiór punktów płaszczyzny, leżących nad wykresem funkcji $y = f(x)$ i na tym wykresie.

4^o. Nierówność $y \leqslant f(x)$ określa zbiór punktów płaszczyzny, leżących pod wykresem funkcji $y = f(x)$ i na tym wykresie.

Zadania na zajęcia

Zadanie 1. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór określony przez daną nierówność:

a) $x > 8$; b) $y \geqslant 5$.

Zadanie 2. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór określony przez daną nierówność:

a) $x + 2y > 8$; b) $2x - y \geqslant 1$.

Zadanie 3. Wskazać na płaszczyźnie Oxy zbiór punktów (x, y), których współrzędne x i y spełniają warunek $|x| + |y| < 1$.

Zadania domowe

Zadanie 4. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór punktów (x, y) określony przez dany warunek:

a) $y \leqslant 3$;	b) $y > 2$;	c) $x < 4$;
d) $x \geqslant 1$;	e) $y > x$;	f) $x + y \geqslant 1$;
g) $x + 2y \geqslant 6$;	h) $2x + y \geqslant 6$;	i) $4x + 5y < 0$.

Zadanie 5. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór punktów (x, y) określony przez dane warunki:

a) $4 < x < 8$;	b) $1 < y < 2$;	c) $\begin{cases} y \geqslant x^2, \\ y < 4; \end{cases}$
d) $\begin{cases} x + y > 0 \\ \lvert x\rvert \leqslant 1; \end{cases}$	e) $\begin{cases} x + y \geqslant 2, \\ x - y \geqslant -1; \end{cases}$	f) $\begin{cases} \lvert x\rvert \leqslant 1, \\ \lvert y\rvert \leqslant 2. \end{cases}$

0.2. Kilka przykładów programowania liniowego *nadprogramowe*

Zadanie 6. Dzieci z klasy Ia z przyniesionych do szkoły 160 kasztanów, 240 żołędzi i wielu zapałek mają robić ludki dwóch rodzajów. Liczby kasztanów i żołędzi potrzebnych do zbudowania jednego ludka każdego rodzaju przedstawia tabelka:

	kasztany	żołędzie
ludek I	2	2
ludek II	1	3

Obliczyć, ile ludków każdego rodzaju powinny zrobić dzieci, by łączna liczba ludków była możliwie największa.

Zadanie 7. Zakład stolarski wytwarza stoły i szafy z dwóch rodzajów drewna. Zużycie jednostkowe drewna (w m^3) przedstawia tabela

	drewno I-go rodzaju	drewno II-go rodzaju
stół	0,1	0,15
szafa	0,4	0,2

Obliczyć, ile stołów i szaf powinien zrobić zakład, aby osiągnąć maksymalny zysk, jeśli ma on w zapasie 8 m^3 drewna I-go rodzaju i 6 m^3 drewna II-go rodzaju oraz zysk z wytworzenia jednego stołu i jednej szafy jest odpowiednio równy 90 zł i 140 zł.

Zadanie 8. Zakład produkuje dwa rodzaje pasz trójskładnikowych w workach po 20 kg. Zawartość (w kg) jednego worka paszy przedstawia tabela

	składnik A	składnik B	składnik C
pasza I	10	5	5
pasza II	5	5	10

Zysk ze sprzedaży worka paszy I wynosi 1,10 zł, a worka paszy II 1,30 zł. Obliczyć, ile worków paszy każdego rodzaju powinien wyprodukować zakład, aby osiągnąć jak największy zysk, jeśli wiadomo, że zapasy składników A, B i C wynoszą 60 T, 35 T i 60 T odpowiednio. Podać wielkość tego zysku.

Zadanie 9. Na fermie zwierzęta karmi się dwoma rodzajami karmy. Zawartość składników A, B i C w 1 kg karmy (w jednostkach j) oraz cenę 1 kg karmy (w zł) przedstawia poniższa tabela

	składnik A	składnik B	składnik C	cena
karma I	2	2	1	0,5
karma II	1	3	2	0,3

Dzienna racja żywieniowa jednego zwierzęcia powinna zawierać przynajmniej 10 j, 18 j i 10 j składników A, B i C odpowiednio. Obliczyć, ile kg karmy I i karmy II powinno składać się na rację dzienną zwierzęcia, aby koszt żywienia zwierząt był najniższy.

Zadanie 10. Wielokąt wypukły $D \subset \mathbb{R}^2$ określony jest przez warunki:

$$\begin{cases} 3x + 2y \leqslant 21, \\ x + 2y \leqslant 11, \\ x + 3y \leqslant 15, \\ x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0. \end{cases}$$

Znaleźć punkt $(x_0, y_0) \in D$, w którym funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, określona wzorem $f(x, y) = x + 2y$ osiąga wartość największą i podać tę wartość.

Zadania domowe

Zadanie 11. Zakład stolarski wytwarza stoły i szafy z dwóch rodzajów drewna. Zużycie jednostkowe drewna (w m^3) przedstawia tabela

	drewno I-go rodzaju	drewno II-go rodzaju
stół	0,3	0,3
szafa	0,2	0,4

Obliczyć, ile stołów i szaf powinien zrobić zakład, aby osiągnąć maksymalny zysk, jeśli ma on w zapasie 18 m^3 drewna I-go rodzaju i 24 m^3 drewna II-go rodzaju oraz zysk z wytworzenia jednego stołu i jednej szafy jest odpowiednio równy 60 zł i 70 zł. Podać wartość maksymalngo zysku.

Zadanie 12. Na fermie zwierzęta karmi się dwoma rodzajami karmy. Zawartość składników A, B i C w 1 kg karmy (w jednostkach j) oraz cenę 1 kg karmy (w zł) przedstawia poniższa tabela

	składnik A	składnik B	składnik C	cena
karma I	2	2	1	0,5
karma II	1	3	2	0,3

Dzienna racja żywieniowa jednego zwierzęcia powinna zawierać przynajmniej 10 j, 18 j i 10 j składników A, B i C odpowiednio. Obliczyć, ile kg karmy I i karmy II powinno składać się na rację dzienną zwierzęcia, aby koszt żywienia zwierząt był najniższy.

Kilka uwag o programowaniu liniowym.

1^o. *Zaprezentowana tu metoda odgrywa ważną rolę w ekonomii, gdyż w wielu przypadkach pozwala ona zmaksymalizować zysk lub zminimalizować koszty.*

2^o. *Wszystkie przedstawione tu zadania dotyczą problemów, w których występują dwie zmienne x i y. Jednakże metoda ta równie dobrze funkcjonuje w problemach z większą niż 2 liczbą zmiennych. Rolę* *prostych przejmują wtedy hiperpłaszczyzny, a rolę wielokątów przejmują wielościany wypukłe, będące przekrojami półprzestrzeni wyznaczonych przez hiperpłaszczyzny. I w tym ogólnym przypadku wykorzystuje się fakt, że jeśli funkcjonał liniowy przyjmuje w wielościanie wypukłym wartość największą (ew. najmniejszą), to wartość tę przyjmuje on w pewnym spośród wierzchołków tego wielościanu. W przypadku liczby zmiennych większej od 2 wierzchołki wielościanu wyznacza się metodami algebraicznymi.*

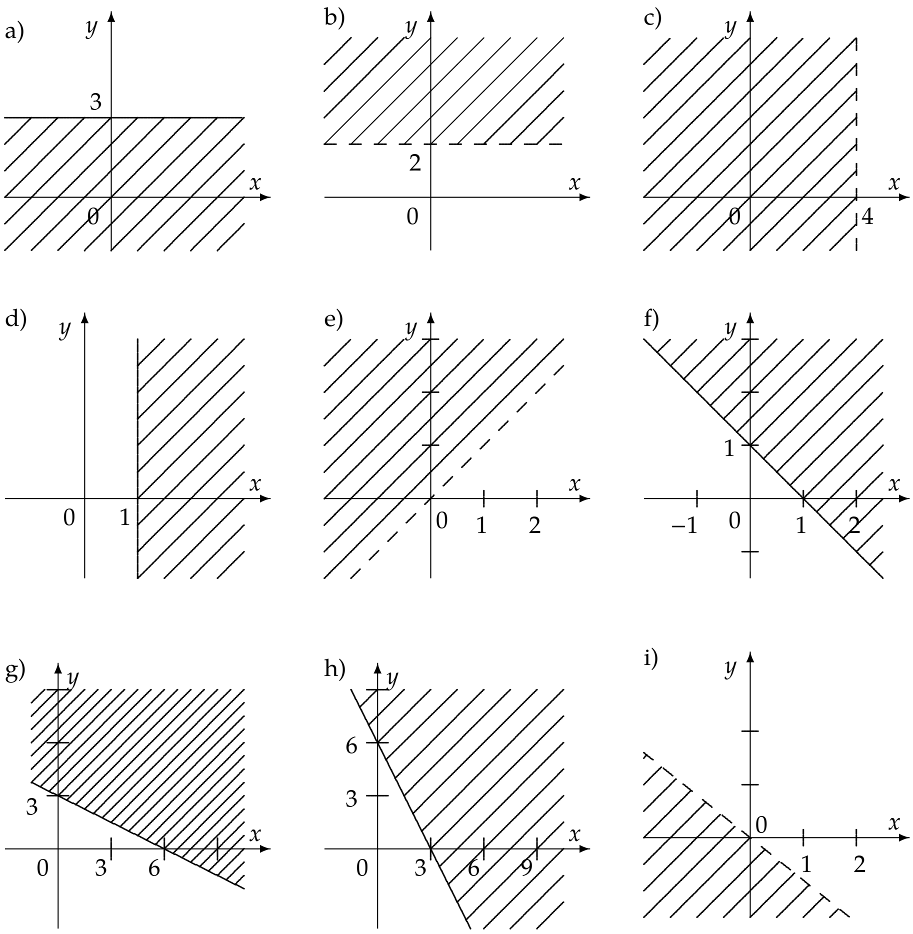
3^o. *Odrębnym zagadnieniem jest to, jak postępowć w przypadku, gdy otrzymane w trakcie obliczeń niecałkowite wartości optymalne nie mają sensu (np. niecałkowite liczby stołów czy też szaf). Znane są skuteczne metody postępowania w takich sytuacjach.*

Literatura

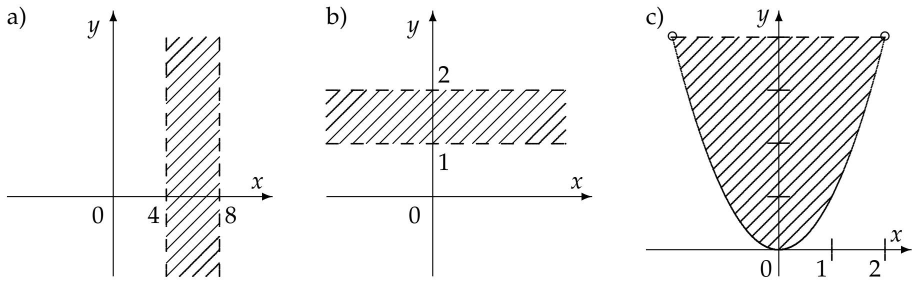
1. Białynicki-Birula Andrzej, Algebra liniowa z geometrią, PWN Warszawa, 1976
2. Janikowski Józef, Elementy algebry liniowej, PZWS Warszawa, 1972

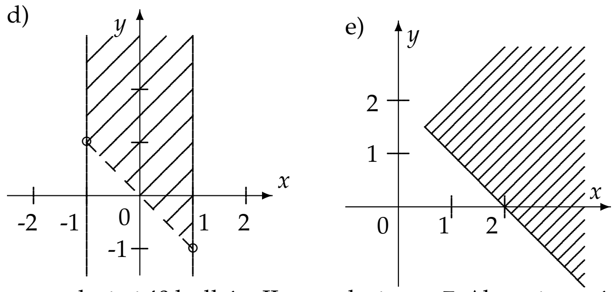
Odpowiedzi

4.



5.





6. Dzieci powinny zrobić 60 ludków I-szego rodzaju i 40 ludków II-go rodzaju. **7.** Aby osiągnąć maksymalny zysk, warsztat powinien zrobić 20 stołów i 15 szaf. **8.** Zakład powinien wyprodukować 2000 worków paszy I-go rodzaju i 5000 worków paszy II-go rodzaju. Osiągnie wówczas zysk 8700 zł. **9.** Aby koszty żywienia zwierząt były najmniejsze, dzienną rację karmy powinny tworzyć 3 kg karmy I i 4 kg karmy II. **10.** Największą wartością funkcji f jest 11. Wszystkimi punktami zbioru D, w których funkcja f przyjmuje tę wartość są punkty odcinka o końcach $(3;4)$ i $(5;3)$ czyli punkty postaci $(3+2t, 4-t)$, gdzie $t \in \langle 0;1 \rangle$. **11.** Zakład powinien zrobić 40 stołów i 30 szaf. uzyska wtedy 4500 zł zysku. **12.** Dzienna racja żywieniowa zwierzęcia powinna składać się z 6 kg karmy I i 1 kg karmy II.