Jednokładność i podobieństwo

Adrian Łydka
Bernadeta Tomasz

Teoria

Definicja 1. Iloczynem niezerowego wektora $\vec{u}$ przez liczbę rzeczywistą $s \neq 0$ nazywamy wektor $\vec{v}$ spełniający następujące dwa warunki:

1) $|\vec{v}| = |s| \cdot |\vec{u}|$,

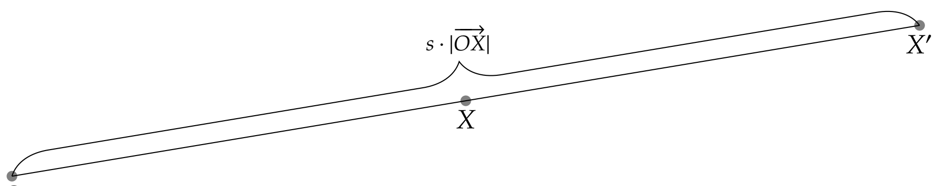
2) zwroty $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są zgodne wtedy i tylko wtedy, gdy $s > 0$; zwroty $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są przeciwne wtedy i tylko wtedy, gdy $s < 0$.

Jeżeli $\vec{u} = \vec{0}$ lub $s = 0$, to $s \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

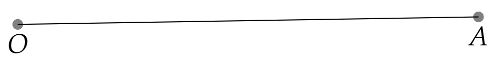
Definicja 2. Jednokładnością (homotetią) o środku O i skali $s \neq 0$ nazywamy przekształcenie płaszczyzny, które każdemu punktowi X płaszczyzny przyporządkowuje punkt X' taki, że

$$\overrightarrow{OX'} = s \cdot \overrightarrow{OX}.$$

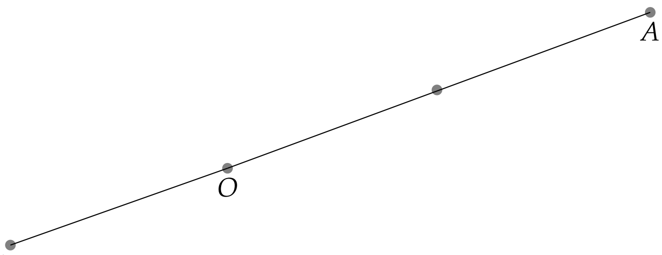
Jednokładność o środku O i skali s oznaczamy J_O^s.



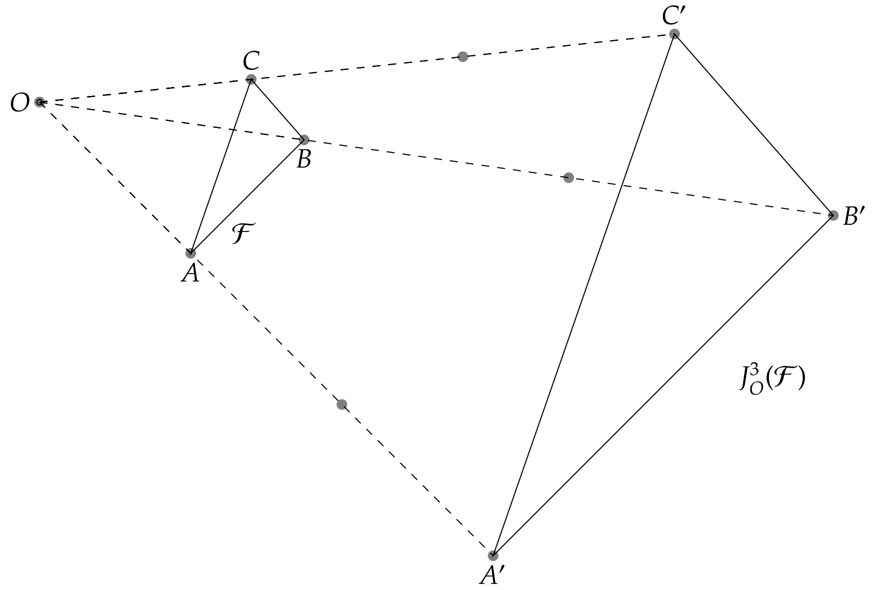
Przykład 1. Dane są punkty O i A. Znajdziemy punkt $A' = J_O^{-\frac{1}{2}}(A)$. Narysujmy najpierw odcinek OA



Skala jednokładności jest ujemna, zatem jej środek O jest między punktami A i A'. Ponadto $|OA'| = \frac{1}{2}|OA|$, bo $s = -\frac{1}{2}$.



Definicja 3. Figury $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ nazywamy **jednokładnymi**, jeżeli jedną z nich można przekształcić przez jednokładność na drugą (wówczas oczywiście także drugą figurę można przekształcić na pierwszą przez jednokładność). Środek tej jednokładności nazywamy środkiem jednokładności figur $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$. Jeżeli $J_O^s(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_2$, to mówimy, że $\mathcal{F}_2$ jest jednokładna do $\mathcal{F}_1$ w skali s.



Rysunek 1.

Przykład 2. Na powyższym rysunku mamy przykład przekształcenia trójkąta w jednokładności o skali $s = 3$ i środku O.

Twierdzenie 1. *W jednokładności* J_O^s*:*

a) obrazem odcinka AB jest taki odcinek $A'B'$, dla którego $|A'B'| = |s| \cdot |AB|$,

b) obrazem prostej jest prosta do niej równoległa, w szczególności obrazem wektora jest wektor do niego równoległy,

c) obrazem kąta jest kąt do niego przystający.

Twierdzenie 2.

a) $J_O^{s_1} \circ J_O^{s_2} = J_O^{s_1 s_2}$.

b) Przekształceniem odwrotnym do J_O^s *jest* $J_O^{\frac{1}{s}}$.

Niech $|\mathcal{F}|$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Poniższe twierdzenie orzeka jak zmienia się pole w jednokładności o skali s.

Twierdzenie 3. *Jeżeli* $\mathcal{F}_2 = J_O^s(\mathcal{F}_1)$*, to* $|\mathcal{F}_2| = |s|^2 \cdot |\mathcal{F}_1|$.

Definicja 4. Podobieństwem P **o skali** k ($k > 0$) nazywamy takie przekształcenie płaszczyzny, które dowolnym dwóm punktom X i Y przyporządkowuje takie punkty $P(X) = X'$ i $P(Y) = Y'$, że

$$|X'Y'| = k|XY|.$$

Definicja 5. Figury $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ nazywamy **podobnymi**, jeżeli istnieje takie podobieństwo P, dla którego $P(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_2$. Fakt ten zapisujemy $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$.

Z powyższej definicji wnioskujemy, że wielokąty $A_1A_2\ldots A_n$ oraz $B_1B_2\ldots B_n$ są **podobne**, jeżeli ich kąty są odpowiednio równe, a boki proporcjonalne, tzn. gdy

$$\measuredangle A_1 = \measuredangle B_1, \quad \measuredangle A_2 = \measuredangle B_2, \ldots, \quad \measuredangle A_n = \measuredangle B_n \tag{1}$$

oraz

$$\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|} = \frac{|A_2A_3|}{|B_2B_3|} = \cdots = \frac{|A_nA_1|}{|B_nB_1|}. \tag{2}$$

W szczególności dwa trójkąty są podobne, jeżeli kąty jednego trójkąta są równe odpowiednim kątom drugiego trójkąta i ich odpowiednie boki są proporcjonalne.

W praktyce, przy badaniu podobieństwa trójkątów, stosuje się poniższe twierdzenie, które pozwala na podstawie mniejszej ilości informacji wnioskować o podobieństwie trójkątów.

Twierdzenie 4.
I cecha podobieństwa trójkątów (bbb): *Dwa trójkąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego.*
II cecha podobieństwa trójkątów (bkb): *Dwa trójkąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta, a kąty zawarte między proporcjonalymi bokami mają równe miary.*
III cecha podobieństwa trójkątów (kk): *Dwa trójkąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy dwa kąty jednego z nich mają te same miary, co dwa kąty drugiego.*

Zadania na zajęcia

Zadanie 1. Jakie przekształcenie płaszczyzny przedstawia J_O^1, a jakie przekształcenie płaszczyzny przedstawia J_O^{-1}?

Zadanie 2. Mając dwa różne punkty A i A' znaleźć taki punkt O, dla którego:
a) $J_O^{-1}(A) = A'$, b) $J_O^2(A) = A'$, c) $J_O^{-\frac{1}{2}}(A) = A'$.

Zadanie 3. Mając dane dwa różne punkty O i X' znaleźć taki punkt X, dla którego:
a) $J_O^2(X) = X'$, b) $J_O^{-1}(X) = X'$, c) $J_O^{-3}(X) = X'$, d) $J_O^{\frac{3}{2}}(X) = X'$.

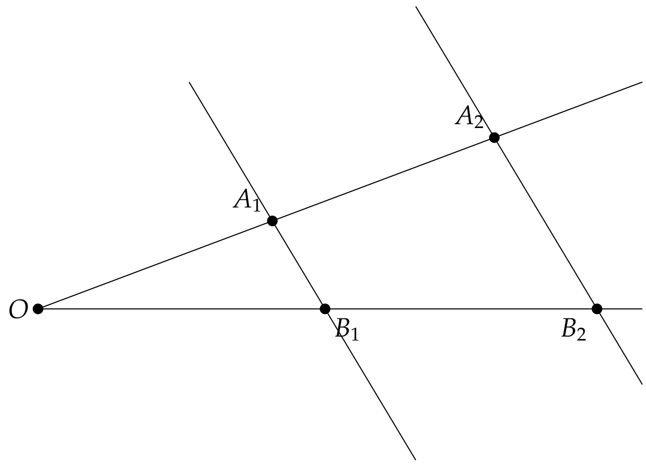
Zadanie 4. Podać przykład figur, które są podobne, ale nie są jednokładne.

Zadanie 5. Czy można twierdzić, że są podobne:
a) wszystkie trójkąty równoramienne,
b) wszystkie trójkąty równoboczne,
c) wszystkie trójkąty, które są jednocześnie prostokątne i równoramienne,
d) wszystkie romby,
e) wszystkie kwadraty,
f) wszystkie prostokąty,
g) wszystkie romby, mające po jednym kącie równym,
h) wszystkie równoległoboki, mające po jednym kącie równym?

Zadanie 6. W celu oszacowania wysokości drzewa uczeń ustawił się tak, że koniec jego cienia pokrywał się z końcem cienia drzewa. Następnie zmierzył swój cień – 3, 6 m. Odległość ucznia od drzewa wynosiła 16,4 m. Jaka jest wysokość drzewa, jeśli uczeń ma 180 cm wzrostu.

Zadanie 7. Mając dane długości boków dwóch trójkątów rozstrzygnąć, czy są one podobne:
a) 4, 5, 6 i 10, 12, 8;
b) 3, 4, 6 i 9, 18, 15.

Zadanie 8. Na poniższym rysunku proste A_1B_1 i A_2B_2 są równoległe. Pokazać, że trójkąty OA_1B_1 i OA_2B_2 są podobne.



Zadanie 9. Przeczytaj poniższy tekst i odpowiedz na pytania.

Przekształcenie płaszczyzny w płaszczyznę nazywamy *podobieństwem*, gdy istnieje taka liczba $k > 0$, że gdy obrazami punktów A i B są punkty A' i B', to $A'B' = k \cdot AB$.

Mówimy, że dwie figury geometryczne są *podobne*, gdy istnieje podobieństwo przekształcające jedną z nich na drugą.

Pytania do tekstu.

1. Co to jest „przekształcenie płaszczyzny w płaszczyznę"?
2. Jakie znasz oznaczenia na odległość dwóch punktów? Jakie są ich zalety i wady?
3. Czemu służą słowa „nazywamy" (linia 1) i „mówimy" (linia 3)?
4. Z jakich części składa się pierwszy akapit powyższego tekstu? A drugi? W jakim celu użyto kursywy w liniach 1 i 3?
5. Czy symetria osiowa jest podobieństwem? A obrót? Przesunięcie o wektor? Sformułuj i udowodnij fakt obejmujący wszystkie te przypadki.
6. Wskaż przykład podobieństwa nie będącego izometrią.
7. Wskaż przykład przekształcenia płaszczyzny nie będącego podobieństwem.
8. Czy odwzorowanie stałe jest podobieństwem? Dlaczego?
9. Udowodnij, że każde podobieństwo jest przekształceniem różnowartościowym.
10. (a) Co by się stało, gdyby warunek $k > 0$ z definicji podobieństwa zastąpić warunkiem $k \neq 0$? (b) A warunkiem $k \in \mathbb{R}$?
11. Co to jest „figura geometryczna"? Czy punkt na płaszczyźnie jest figurą geometryczną?
12. Niech A, B, C, D będą czterema punktami płaszczyzny, przy czym $A \neq B$ i $C \neq D$. Kiedy odcinki AB i CD są podobne?

13. Niech S, T będą dwoma punktami płaszczyzny i niech $q, r > 0$. Kiedy okręgi $O(S, q)$ i $O(T, r)$ są podobne?
14. Kiedy dwa trójkąty są podobne?
15. Wskaż przykład dwóch figur geometrycznych, które nie są podobne.
16. Rozważmy pewne odwzorowanie płaszczyzny. Odwzorowanie to przekształca punkty $A = (0, 0)$ i $B = (1, 0)$ w punkty $A' = (-1, -1)$ oraz $B' = (2, 3)$. Czy można stąd wywnioskować, że odwzorowanie to jest podobieństwem o skali 5?

Zadanie 10. Czy istnieje jednokładność o skali $s \neq 1$ przekształcająca na siebie:
a) odcinek, b) prostą, c) półprostą, d) okrąg?

Zadanie 11. Mając dwa różne punkty A i A' znaleźć taki punkt O, dla którego:
a) $J_O^{-3}(A') = A$, b) $J_O^{3}(A') = A$, c) $J_O^{\frac{1}{2}}(A) = A'$.

Zadanie 12. Czy złożenie dwóch podobieństw jest podobieństwem?

Zadanie 13. Czy trójkąty z Rysunku 1 są podobne?

Zadanie 14. Czy złożenie dwóch jednokładności jest podobieństwem?

Zadanie 15. Wykazać, że jeżeli dwa wielokąty są podobne w skali k, to stosunek obwodów tych wielokątów też równa się k.

Zadanie 16. Figura F_1 jest podobna do F_2 w skali k, a figura F_2 jest podobna do F_1 w skali $2k$. Wyznaczyć k.

Zadanie 17. Mając dane długości boków dwóch trójkątów rozstrzygnąć, czy są one podobne:
a) 17, 34, 25 i 100, 50, 70
b) 2, 2, 1 i 0.25, 0.5, 0.5.

Zadanie 18. Dany trójkąt ma boki długości 6, 8, 13. Najkrótszy bok trójkąta podobnego do danego ma długość 21. Jaką długość mają pozostałe boki drugiego trójkąta?

Zadanie 19. Trójkąt ABC jest ostrokątnym trójkątem różnobocznym. Zbadać, czy istnieje prosta przechodząca przez jeden z wierzchołków trójkąta i dzieląca ten trójkąt na dwa trójkąty podobne.

Zadanie 20. Mając dany trójkąt ABC i odcinek długości a, skonstruować trójkąt $A'B'C'$ podobny do danego tak, aby $|A'B'| = a$.

Zadanie 21. Następujące zdania mają wyrażać cechy podobieństwa figur. Zbadać, które są prawdziwe, a które fałszywe. Odpowiedź uzasadnić. Niektóre ze zdań zawierają zbyt wiele warunków. Wskazać, co można pominąć.

a) Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne.

b) Jeżeli dwa trapezy mają kąty odpowiednio przystające, to są podobne.

c) Jeżeli w trójkątach ABC i $A'B'C'$ odcinki AA_1 i $A'A'_1$ są odpowiednio środkowymi boków BC i $B'C'$ oraz $\frac{|AB|}{|AA_1|} = \frac{|A'B'|}{|A'A'_1|}$ oraz $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|A'B'|}$, to te trójkąty są podobne. **Wskazówka. Rozważ rówoległobok o bokach AB i AC oraz równoległobok o bokach $A'B'$ i $A'C'$.**

d) Jeżeli wycinki dwóch kół są wyznaczone przez dwa przystające kąty środkowe oraz odpowiadające im cięciwy są proporcjonalne do promieni tych kół, to te wycinki są podobne.

Zadanie 22. Dane są dwie proste równoległe k i l oddalone od siebie o a. Jaką figurę tworzą punkty X takie, dla których jednokładność J_X^s, gdzie $s > 1$ jest ustalone, przekształca prostą k na prostą l?

Zadanie 23. Przez wierzchołki trójkąta ABC prowadzimy proste równoległe do przeciwległych boków i otrzymujemy trójkąt $A'B'C'$. Pokazać, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne.

Zadanie 24. Mając dany prostokąt $ABCD$ skonstruować prostą, która odcina od danego prostokąta prostokąt do niego podobny.

Zadanie 25. Jakie muszą być długości boków prostokąta $ABCD$, aby istniała prosta dzieląca dany prostokąt na dwa prostokąty, z których każdy jest podobny do prostokąta $ABCD$.

Zadanie 26. Na boku BC trójkąta ABC obrano punkt D, taki że $|BD| : |DC| = 2 : 1$. W jakim stosunku środkowa CM dzieli odcinek AD?

Zadania domowe

Zadanie 27. Czy złożenie dwóch jednokładności jest jednokładnością?

Zadanie 28. Wykazać, że jeżeli dwa trójkąty są podobne w skali k, to stosunek:

a) odpowiednich wysokości tych trójkątów,

b) odpowiednich dwusiecznych tych trójkątów,

c) odpowiednich środkowych tych trójkątów,

także wynosi k.

Zadanie 29. Dany jest trójkąt ABC o bokach długości $a = |BC|, \quad b = |CA|, \quad c = |AB|$. Zbudowano sześciokąt $MNPQRS$ za pomocą jednokładności

$$M = J_A^2(B), \quad N = J_A^2(C), \quad P = J_B^2(C),$$

$$Q = J_B^2(A), \quad R = J_C^2(A), \quad S = J_C^2(B).$$

Znaleźć boki tego sześciokąta.

Zadanie 30. Mając dany trójkąt ABC i odcinek długości a, skonstruować trójkąt $A'B'C'$ podobny do danego, którego obwód równa się a.

Zadanie 31. Mając dany prostokąt $ABCD$ i odcinek długości a, skonstruować prostokąt podobny do danego, w którym przekątna ma długość a.

Literatura

(a) Z. Krygowska, Geometria dla klas 1 i 2 liceum ogólnokształcącego, 1, 2 i 3 technikum, wyd.IV, WSiP, Warszawa, 1982.

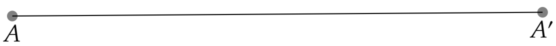
(b) A. Łomnicki, G. Treliński, Geometria dla klasy I liceum ogólnokształcącego, liceum zawodowego i technikum, wyd.III, WSiP, Warszaw,1988.

(c) S. Mizia, Wykaż, że ... Zbiór zadań z geometrii, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław, 2011.

(d) K. Szymański, N. Dróbka, Matematyka w szkole średniej, Powtórzenie i zbiór zadań, wyd.IV, WNT, Warszawa, 2004.

Wskazówki

1. Jeśli $J_O^s(X) = X'$, to punkty O, X i X' są współliniowe, tzn. należą do tej samej prostej. Prześledzić wzajemne położenie punktów X, O i X' oraz odległości punktów X i X' od punktu O. **2.** Narysujmy najpierw odcinek AA'.

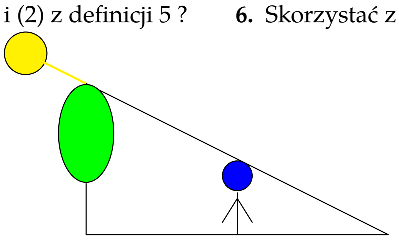


Zauważmy, że jeżeli $J_O^s(A) = A'$, to

1) punkt O znajduje się między punktami A i A' wtedy i tylko wtedy, gdy $s < 0$,

2) punkt A' znajduje się między punktami O i A wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < s < 1$,

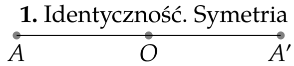
3) punkt A znajduje się między punktami O i A' wtedy i tylko wtedy, gdy $s > 1$. **3.** Skorzystać z własności odwzorowania odwrotnego. Odwzorowaniem odwrotnym do J_O^s jest $J_O^{\frac{1}{s}}$. **4.** Odpowiednie boki figur jednokładnych są równoległe i proporcjonalne. Czy obydwie te własności muszą mieć figury podobne? **5.** a) Czy podobieństwo zachowuje miary kątów? b), c) Czy zachodzi któraś z cech podobieństwa trójkątów z twierdzenia 4? d) Patrz wskazówka do a). e), f), g), h) Czy zachodzą wnioski (1) i (2) z definicji 5 ? **6.** Skorzystać z własności trójkątów podobnych albo z twierdzenia Talesa.

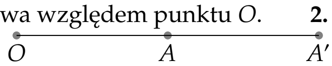


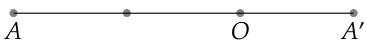
7. Uporządkować w kolejności niemalejącej długości boków poszczególnych trójkątów. Czy długości boków dla odpowiednich par trojkątów są proporcjonalne? **8.** Skorzystać z warunku (3) z rozdziału Twierdzenie Talesa. **10.** Szukamy jednokładności, które przekształcają dana figurę na nią samą i które jednocześnie nie są identycznościami, tzn. że szukane jednokładności przekształcają pewne punkty danej figury w inne punkty tej figury. **11.** Patrz zadanie 2. **12.** Sprawdzić, czy spełniona jest definicja 4. **13.** Czy trójkaty te spełniają którąś z cech podobieństwa z twierdzenia 4? **14.** Patrz twierdzenie 1. **15.** Dla boków wielokątów podobnych mamy $|A'B'| = k|AB|$. **16.** Rozważyć złożenie tych dwóch podobieństw. **17.** Patrz zadanie 7. **18.** Wyznaczyć skalę k podobieństwa. **19.** Rozważyć następujące przypadki: gdy jeden z powstałych trójkątów jest ostrokątny, gdy jeden z powstałych trójkątów jest prostokątny. **20.** Można przyjąć, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ są tak położone, że $A = A'$ i punkt B' leży na półprostej będącej przedłużeniem boku AB. Punkt B' zaznaczyć tak aby $|A'B'| = a$. Dalej wystarczy skorzystać z twierdzenia Talesa albo z własności trójkątów podobnych. **21.** a) Czy własność (b, b) wystarcza dla podobieństwa trójkatów? b) Czy to zapewnia proporcjoalność boków tych trapezów? d) Dla przystających kątów środkowych długości łuków i promieni są proporcjonalne. **22.** Punkt X nie może leżeć pomiędzy prostymi k i l. Jeśli pewien punkt X spełnia warunki zadania, to spełnia je też każdy punkt z prostej równoległej do prostych k i l przechodzącej przez punkt X. **23.** Rozważyć dwie pary prostych równoległych i wyznaczone przez nie równoległoboki. **24.** Czy rozważany prostokąt może być kwadratem? Czy szukana prosta może być równoległa do dłuższego boku prostokąta? Zapisać odpowiednie proporcje jakie powinny zachodzić pomiędzy długościami odpowiednich boków prostokąta $ABCD$ i powstającego prostokąta podobnego. **25.** Z zadania 24 wynika, że K musi być środkiem boku AB. **26.** Przez punkt D przeprowadzić prostą równoległą do boku AB. Przez punkt przecięcia prostych AD i środkowej CM poprowadzić prostą równoległą do AB. Rozważyć odpowiednie pary trójkątów podobnych. **27.** Jednokładności nie muszą mieć tego samego środka. **28.** Dla rozważenia długości odpowiednich odcinków w tych trójkątach, można ustawić je tak, by jeden z wierzchołków jednego trójkąta pokrywał się z odpowiednim wierzchołkiem drugiego trójkąta i jednocześnie, by odpowiednie boki tych trójkątów leżały na jednej prostej. Dalej można skorzystać z własności trójkątów podobnych albo z twierdzenia Talesa. **29.** Jak zmieniają się długości boków w tej jednokładności ? Skorzystać z definicji jednokładności. **30.** Odcinek o długości a podzielić na 3 części o długościach proporcjonalnych do długości odpowiednich boków trójkąta ABC. Skorzystać z twierdzenia Talesa. **31.** Skonstruować odcinek o długości z taki, że $\dfrac{AC}{z} = \dfrac{BC}{a}$. Skorzystać z własności trójkątów podobnych.

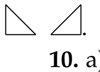
Odpowiedzi

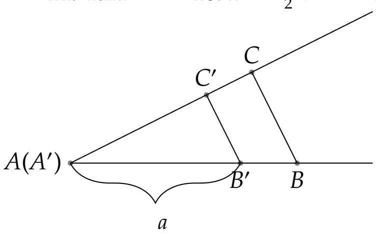
1. Identyczność. Symetria środkowa względem punktu O. **2.**

a) 

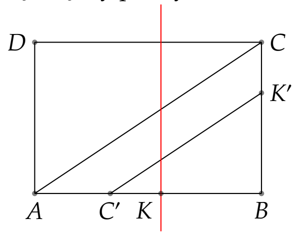
b) 

c) 

3. a) $X = J_O^{\frac{1}{2}}(X')$, b) $X = J_O^{-1}(X')$, c) $X = J_O^{-\frac{1}{3}}(X')$, d) $X = J_O^{\frac{2}{3}}(X')$. **4.** Np. . **5.** a) nie, b) tak, c) tak, d) nie, e) tak, f) nie, g) tak, h) nie. **6.** 10 m. **7.** a) tak, b) nie. **10.** a) tak, b) tak, c) tak, d) tak. **12.** Tak. **13.** Tak. **14.** Tak. **16.** $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **17.** a) nie, b) tak. **18.** 28; 45,5.



19. Taka prosta nie istnieje. **20.** **21.** a) nie, b) nie, c) tak, d) tak (drugi warunek można pominąć). **22.** Prosta m odległa od prostej k o $\frac{a}{s-1}$, przy czym prosta k znajduje się między prostymi m i l.



24. $|BC'| = |BC|$, $|K'B| = |KB|$.

25. $|AB| = \sqrt{2}|BC|$. **26.** $3 : 1$. **27.** Nie **29.** $2a, c, 2b, a, 2c, b$