Twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg i o czworokącie opisanym na okręgu.

Adrian Łydka
Bernadeta Tomasz

Teoria

Definicja 1. Klasyfikacja czworokątów (wypukłych):
Trapez jest czworokątem, w którym co najmniej jedna para boków jest równoległa.
Równoległobok jest czworokątem, w którym przeciwległe boki są równoległe.
Romb jest równoległobokiem, który ma wszystkie boki równe.
Prostokąt jest równoległobokiem, w którym wszystkie kąty są proste.
Kwadrat jest prostokątem, którego wszystkie boki są równe.

Definicja 2. *Okręgiem opisanym* na czworokącie nazywamy okrąg przechodzący przez wszystkie wierzchołki czworokąta.

Definicja 3. *Okręgiem wpisanym* w czworokąt nazywamy okrąg styczny do wszystkich boków czworokąta.

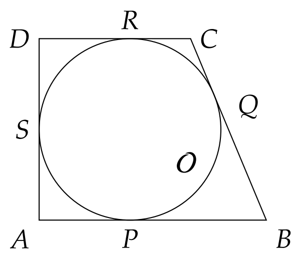
Lemat 1. *Z punktu A położonego na zewnątrz okręgu o środku O można poprowadzić dwie styczne do tego okręgu. Niech punkty P i Q będa punktami styczności. Półprosta AO jest dwusieczną kąta PAQ utworzonego przez styczne, a odcinki AP i AQ są równe.*

Szkic dowodu.
Trójkąty OPA i OQA są prostokątne, ponieważ kąty między promieniami i stycznymi do okręgu w punktach P i Q są proste; mają wspólną przeciwprostokątną OA i równe co do długości przyprostokątne OP i OQ (promień okręgu). Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $|AP| = \sqrt{|AO|^2 - |OP|^2} = \sqrt{|AO|^2 - |OQ|^2} = |AQ|$.

Twierdzenie 1. *(Twierdzenie o czworokącie opisanym na okręgu)*
W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe.

Szkic dowodu.
1) Implikacja ”jeśli w czworokąt można wpisać okrąg, to sumy długości przeciwległych boków czworokąta są równe”, wynika z lematu 1.
Załóżmy, że w czworokąt można wpisać okrąg. Oznaczmy go przez $\mathcal{O}$, a przez P, Q, R, S punkty styczności tego okręgu odpowiednio z bokami AB, BC, CD, DA powyższego czworokąta. Z lematu 1 wynika, że $|AP| = |AS|$, $|BP| = |BQ|$, $|CQ| = |CR|$, $|DR| = |DS|$. Zatem

$$|AB| + |CD| = |AP| + |BP| + |DR| + |CR| = |AS| + |BQ| + |DS| + |CQ| = |BC| + |AD|.$$



2) Implikację, "Jeśli sumy długości przeciwległych boków czworokąta są równe, to w czworokąt ten można wpisać okrąg", udowodnimy metodą nie wprost. Załóżmy, że sumy długości przeciwległych boków czworokąta są równe i przypuśćmy, że w czworokąt $ABCD$ nie można wpisać okręgu. Oznaczmy przez $\mathcal{O}_1$ okrąg styczny do boków AB, BC i CD czworokąta (taki okrąg istnieje, jego środkiem jest punkt przecięcia dwusiecznych kątów ABC i BCD). Zatem okrąg $\mathcal{O}_1$ nie jest styczny do boku AD czworokąta. Przez punkt A prowadzimy prostą styczną do okręgu $\mathcal{O}_1$, a punkt jej przecięcia z bokiem CD oznaczmy przez E. Z założenia mamy

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|,$$

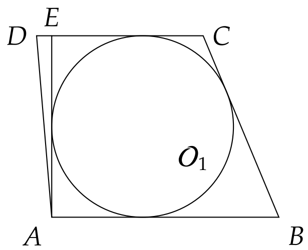
a ponieważ okrąg $\mathcal{O}_1$ jest wpisany w czworokąt $ABCE$, to z 1) mamy

$$|AB| + |CE| = |EA| + |BC|.$$

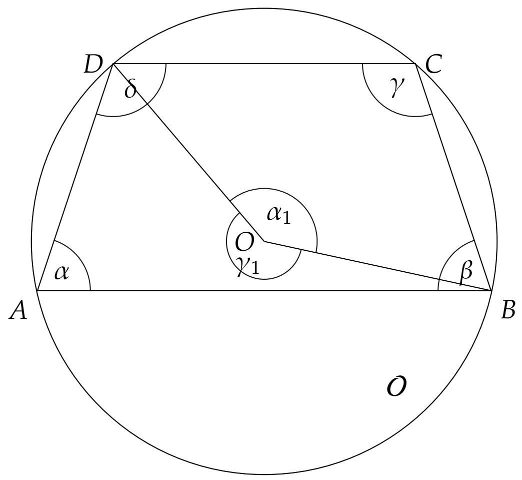
Po odjęciu tych równości stronami otrzymujemy:

$$|CD| - |CE| = |AD| - |EA|, \qquad \text{tzn.} \quad |DE| + |EA| = |AD| \quad \text{co jest niemożliwe.}$$

Zatem odcinek $|AD|$ jest styczny do okręgu $\mathcal{O}_1$.



Twierdzenie 2. *(Twierdzenie o czworokącie wpisanym w okrąg)*
Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy przeciwległych kątów wewnętrznych są równe, tzn. $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$.

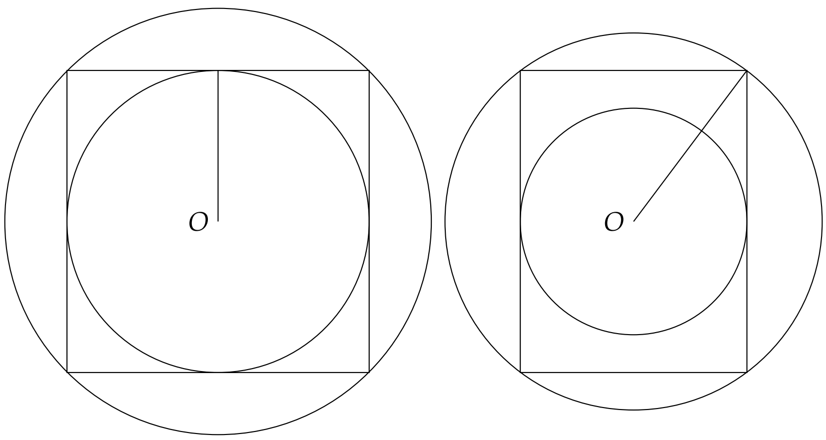


Szkic dowodu.
1) Implikacja: Jeśli na czworokącie można opisać okrąg, to $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$, wynika wprost z

twierdzenia o kątach wpisanym i środkowym w okręgu, wspartych na tym samym łuku. Dla kąta wpisanego BAD i środkowego α_1 opartych na łuku BCD mamy $\measuredangle BAD = \frac{1}{2}\alpha_1$ oraz analogicznie dla kątów wpisanego BCD i środkowego γ_1 opartych na łuku BAD mamy $\measuredangle BCD = \frac{1}{2}\gamma_1$. Suma miar kątów środkowych α_1 i γ_1 jest równa 360°, gdyż kąty te są oparte na łukach dopełniajacych okręgu. Mamy zatem $\measuredangle BAD + \measuredangle BCD = 180°$. Dla drugiej pary kątów w czworokącie $ABCD$ dowód przebiega analogicznie.
2) Implikacja: Jeśli sumy miar przeciwległych kątów w czworokącie są równe ($\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$), to na tym czworokącie można opisać okrąg. Załóżmy, że $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$. Oznaczmy przez O okrąg opisany na trójkącie ABC. Wykażemy stosujac metodę "nie wprost", że $D \in O$. Przypuśćmy, że $D \notin O$, to znaczy, że D leży wewnątrz albo na zewnątrz koła ograniczonego okręgiem O. Z tego wynika, że δ jest albo większy albo mniejszy od kąta $180° - \beta$, co jest sprzeczne z założeniem. Zatem okrąg O jest opisany na czworokącie $ABCD$, co kończy dowód.

Uwaga 1. Twierdzenie 1 (2) podaje warunek konieczny i dostateczny wpisywalności (opisywalności) okręgu w (na) czworokącie.

Przykład 1. Narysuj okrąg wpisany w dany kwadrat. Czy można wpisać okrąg w prostokąt? Jaką własność ma środek okręgu wpisanego w dany czworokąt?



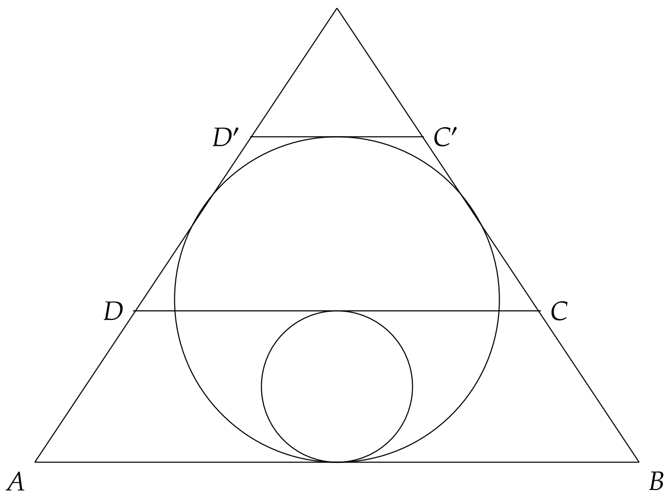
Przykład 2. Narysuj okrąg opisany na kwadracie. Narysuj okrąg opisany na prostokącie. Jaką własność ma środek okręgu opisanego na czworokącie?

Zadania na zajęcia

Zadanie 1. Jakie warunki musi spełniać równoległobok, aby można było a) opisać na nim okrąg, b) wpisać w niego okrąg?

Zadanie 2. Uzasadnij, że trapez daje się wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy jest równoramienny.

Zadanie 3. Uzasadnij, że jeśli trapez jest równoramienny, przy czym długość ramienia trapezu jest równa średniej arytmetycznej długości jego podstaw, to można wpisać w niego okrąg.



Zadanie 4. Na kwadracie o boku długości a opisano okrąg. W jeden z otrzymanych odcinków kołowych wpisano kwadrat tak, że jeden z jego boków zawarty jest w boku kwadratu wyjściowego, a dwa pozostałe wierzchołki należą do okręgu, który jest brzegiem koła. Oblicz długość boku "nowego" kwadratu.

Zadanie 5. Dane są przekątne rombu $|AC| = 8$ oraz $|BD| = 6$. Znajdź promień okręgu wpisanego w ten romb.

Zadanie 6. Oblicz pole trapezu $ABCD$, opisanego na okręgu o promieniu 5, w którym kąt przy wierzchołu A jest dwa razy większy od kąta przy wierzchołku B, a przekątna AC jest dwusieczną kąta przy wierzchołku A.

Zadanie 7. W trapez prostokątny $ABCD$ o ramionach $|AD| = 12$ i $|BC| = 13$ wpisano okrąg. Znajdź podstawy trapezu.

Zadanie 8. W kwadrat wpisano koło, a następnie w to koło wpisano kwadrat. Różnica pól tych kwadratów wynosi 8 cm^2. Oblicz pole koła.

Zadanie 9. Podstawy trapezu równoramiennego są równe $|AB| = 24$, $|CD| = 10$, a promień okręgu opisanego wynosi $R = 13$. Znajdź wysokość trapezu, gdy środek okręgu opisanego leży na zewnątrz trapezu.

Zadanie 10. W trapezie równoramiennym $ABCD$ kąt BAD jest równy 60°, a odległość środka O okręgu wpisanego od wierzchołka A jest równa $|OA| = 2$. Znajdź boki trapezu.

Zadanie 11. Na stole ułożono cztery monety tak, że każda dotyka dwóch sąsiednich. Udowodnij, że środki tych monet są wierzchołkami czworokąta, w który można wpisać okrąg, a punkty styczności są wierzchołkami czworokąta, na którym można opisać okrąg.

Zadanie 12. Znajdź promień okręgu wpisanego w romb o polu $P = 840$, gdy dany jest stosunek długości przekątnych $21 : 20$.

Zadanie 13. Podstawy trapezu równoramiennego $ABCD$ wynoszą $|AB| = 16$, $|CD| = 12$, a wysokość 14. Znaleźć promień R okręgu opisanego.

Zadanie 14. Środek okręgu o promieniu 13, opisanego na trapezie, jest oddalony od podstaw tego trapezu o 5 i 10. Obliczyć pole tego trapezu.

.

Zadanie 15. Na kole o promieniu długości r opisano trapez równoramienny o najmniejszym polu. Znaleźć jego kąty.

Zadania domowe

Zadanie 16. Kwadrat $ABCD$ wpisano w okrąg o promieniu $R > 0$. Wykazać, że dla dowolnego punktu M, leżącego na okręgu, zachodzi równość: $|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 + |MD|^2 = 8R^2$.

Zadanie 17. Uzasadnij, że jeśli środkiem okręgu, opisanego na pewnym czworokącie, jest punkt przecięcia przekątnych, to czworokąt ten jest prostokątem.

Zadanie 18. Podstawy trapezu równoramiennego są równe $|AB| = 24$, $|CD| = 10$, promień okręgu opisanego wynosi $R = 13$. Znajdź wysokość trapezu wiedząc, że środek okręgu opisanego leży wewnątrz trapezu.

Zadanie 19. Na okręgu opisano trapez równoramienny $ABCD$. Oblicz stosunek długości ramienia tego trapezu do jego obwodu.

Zadanie 20. Znajdź promień okręgu wpisanego w trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach $|AB| = 8$ i $|CD| = 2$.

Zadanie 21. Znajdź promień okręgu wpisanego w trapez równoramienny o obwodzie $L = 16$ oraz kącie ostrym $30°$.

Zadanie 22. W trapezie równoramiennym $ABCD$ kąt ADC wynosi $120°$, a odległość wierzchołka D od środka okręgu wpisanego jest równa $|OD| = 2\sqrt{3}$. Znajdź długości boków trapezu.

Literatura

(a) E. Bańkowska, A. Cewe, D. Stankiewicz, Egzamin wstępny na wyższe uczelnie. Zbiór zadań, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2000.

(b) T. Karolak, Repetytorium z matematyki, Wydawnictwo Skrypt, Warszawa 2004.

(c) K. Kłaczkow, M. Kurczab, E. Świda, Matematyka dla licealistów. Podręcznik do II klasy, Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro, Warszawa 2000,

(d) J. Uryga, Nowa matura. Matematyka, ParkEdukacja Nauka bez tajemnic, Warszawa 2008,

(e) A. Zakrzewska, E. Stachowski, M. Szurek, I ty zostaniesz Pitagorasem. Podręcznik do matematyki do klasy drugiej liceum i technikum. Zakres rozszerzony i zakres podstawowy. Oficyna Wydawniczo-Poligraficzna "ADAM", Warszawa 2003,

(f) D. i M. Zakrzewscy, Repetytorium z matematyki dla uczniów szkół średnich i kandydatów na studia. Wydawnictwo Szkolne PWN, Warszawa 2000.

Wskazówki

1. Wystarczy skorzystać odpowiednio z twierdzeń 2 i 1. **2.** Korzystając z twierdzenia 2 pokazać, że zachodzą odpowiednie dwie implikacje. **3.** Zastosować twierdzenie 1. **4.** Skorzystać z twierdzenia Pitagorasa **5.** Środek okręgu wpisanego w romb leży w punkcie przecięcia dwusiecznych jego kątów wewnętrznych (tu są to przekątne rombu). Skorzystać z własności prostopadłości i "dzielenia się" na połowy przekątnych w rombie. **6.** Można pokazać, że obydwa trójkąty na jakie przekątna AC dzieli trapez $ABCD$ są równoboczne. **7.** Wyznaczyć sumę oraz różnicę długości podstaw trapezu. Jedno z ramion trapezu jest jednocześnie jego wysokością. **8.** Opisać promień koła i długość boku mniejszego kwadratu za pomocą długości boku większego kwadratu. **9.** Z własności okręgu opisanego na czworokącie wynika, że środkiem tego okręgu jest punkt przecięcia się symetralnych jego boków. Zatem w przypadku trapezu równoramiennego, środek okręgu opisanego na nim leży na symetralnej jego podstaw. **10.** Środek okręgu wpisanego w trapez należy do dwusiecznej kąta BAD, a ponieważ trapez jest równoramienny, więc środek tego okręgu należy jednocześnie do symetralnej podstaw trapezu. **11.** Pierwsza część zadania wynika wprost z twierdzenia 1. Dla dowodu drugiej części zadania wystarczy pokazać, że symetralne boków mniejszego czworokąta przecinają się w jednym punkcie (jako dwusieczne kątów wewnętrznych większego czworokąta). **12.** Skorzystać ze wzorów na pole rombu wyrażone odpowiednio za pomocą jego przekątnych i za pomocą jego wysokości i podstawy. **13.** Skorzystać z twierdzenia sinusów, patrz rozdział Twierdzenie sinusów i cosinusów. **14.** Rozważyć przypadki, gdy środek leży wewnątrz i gdy leży na zewnątrz trapezu. **15.** Wyrazić pole trapezu za pomocą sinusa kąta leżącego przy podstawie trapezu. **16.** Rozważyć dwa trójkąty prostokątne o wierzchołku $M \neq A, B, C, D$, wsparte na średnicach okręgu wyznaczonych przez wierzchołki kwadratu. Jeśli $M = A$ lub $M = B$ lub $M = C$ lub $M = D$ rozpartujemy jeden trójkąt i dodatkowo średnicę. **17.** Kąty wewnętrzne tego czworokąta są proste, jako wsparte na średnicy okręgu. **18.** Z własności okręgu opisanego na czworokącie wynika, że środek tego okręgu leży w punkcie przecięcia symetralnych jego boków. Zatem w przypadku trapezu równoramiennego, środek okręgu opisanego należy do symetralnej jego podstaw. **19.** Skorzystać z twierdzenia 1. **20.** Skorzystać z twierdzenia 1. **21.** Skorzystać z twierdzenia 1. **22.** Odcinek OD leży na dwusiecznej kąta ADC. Punkt O leży na symetralnej podstaw trapezu.

Odpowiedzi

1. a) Na równoległoboku można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy gdy jest on prostokątem. b) W równoległobok można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy gdy jest on rombem. **4.** $x = \frac{a}{5}$. **5.** $r = 2,4$ **6.** $P = \frac{200\sqrt{3}}{3}$ **7.** $|AB| = 15$, $|CD| = 10$ **8.** $P = 4\pi$ **9.** $H = 7$ **12.** $r = \frac{420}{29}$ **13.** $R = 10$ **14.** $P = 15(12 + \sqrt{69})$ lub $P = 5(12 + \sqrt{69})$ **15.** $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{\pi}{2}$ **18.** $H = 17$ **19.** $k = \frac{1}{4}$ **20.** $r = 2$ **21.** $r = 1$ **22.** $|AB| = 6\sqrt{3}$, $|CD| = 2\sqrt{3}$, $|BC| = |AD| = 4\sqrt{3}$