Twierdzenie Talesa.

Adrian Łydka
Bernadeta Tomasz

Teoria

Definicja 1. Mówimy, że odcinki AB i CD są proporcjonalne odpowiednio do odcinków EF i GH, jeżeli

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|EF|}{|GH|}.$$

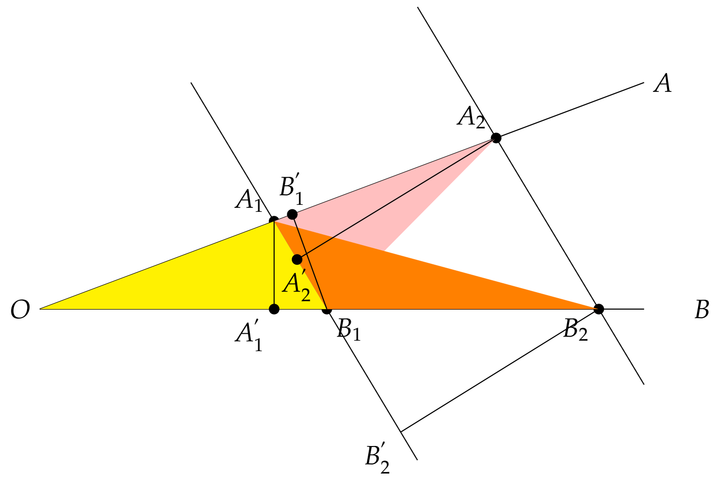
Twierdzenie 1. *(Twierdzenie Talesa)*
Jeżeli ramiona kąta płaskiego przecinają dwie proste równoległe, to odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta.

Uwaga 1. Twierdzenie Talesa jest jednym z najstarszych twierdzeń geometrii euklidesowej, tradycja przypisuje jego sformułowanie Talesowi (Milet (obecnie w Turcji), VII-VI w p.n.e). Dowód twierdzenia przedstawił Euklides (Aleksandria (Egipt), IV w p.n.e.) w swym dziele *Elementy*.

Zadania na zajęcia

Zadanie 1. Podaj założenia i tezę twierdzenia Talesa. Jaką postać ma to twierdzenie? Przeprowadź następującą konstrukcję pomocniczą i prześledź dowód twierdzenia Talesa przedstawiony przez Euklidesa.
Konstrukcja pomocnicza:
(a) Narysować dowolny kąt płaski AOB.
(b) Poprowadzić dwie proste równoległe przecinające ramiona OA i OB kąta AOB.
(c) Punkty przecięcia tych prostych z ramieniem OA oznaczyć jako A_1 i A_2 oraz odpowiednio z ramieniem OB jako B_1 i B_2.
(d) W trójkącie OA_1B_1 poprowadzić wysokości A_1A_1' z wierzchołka A_1 oraz B_1B_1' z wierzchołka B_1.
W trójkącie $A_1B_1A_2$ poprowadzić wysokość A_2A_2' z wierzchołka A_2.
W trójkącie $A_1B_1B_2$ poprowadzić wysokość B_2B_2' z wierzchołka B_2.

(e) Zapisać tezę twierdzenia Talesa za pomocą wyżej wprowadzonych oznaczeń.



Dowód twierdzenia Talesa:
Założenie: proste A_1B_1 i A_2B_2 są równoległe. Teza: zachodzi równość: $\dfrac{|OA_1|}{|A_1A_2|} = \dfrac{|OB_1|}{|B_1B_2|}$.
Dowód: Oznaczmy przez h_1, h_2, h_3, h_4 odpowiednio $h_1 = |A_1A_1'|$ $h_2 = |B_1B_1'|$, $h_3 = |A_2A_2'|$, $h_4 = |B_2B_2'|$. Zauważmy, że $h_3 = h_4$ (jako odległość pomiędzy prostymi A_1B_1 i A_2B_2). Pola trójkątów OA_1B_1, $A_1B_1A_2$ i $A_1B_1B_2$ wyrażone przy pomocy wysokości h_1, h_2 wynoszą odpowiednio:

$$P_{OA_1B_1} = \frac{1}{2} \cdot |OB_1| \cdot h_1 \quad \text{oraz} \quad P_{OA_1B_1} = \frac{1}{2} \cdot |OA_1| \cdot h_2,$$

$$P_{A_1B_1B_2} = \frac{1}{2} \cdot |B_1B_2| \cdot h_1 \quad \text{i} \quad P_{A_1B_1A_2} = \frac{1}{2} \cdot |A_1A_2| \cdot h_2.$$

Zatem

$$\frac{P_{OA_1B_1}}{P_{A_1B_1B_2}} = \frac{|OB_1|}{|B_1B_2|} \quad \text{oraz} \quad \frac{P_{OA_1B_1}}{P_{A_1B_1A_2}} = \frac{|OA_1|}{|A_1A_2|}.$$

Ponieważ $h_3 = h_4$ oraz trójkąty $A_1B_1A_2$ i $A_1B_1B_2$ mają wspólną podstawę A_1B_1, więc $P_{A_1B_1A_2} = P_{A_1B_1B_2}$. Zatem

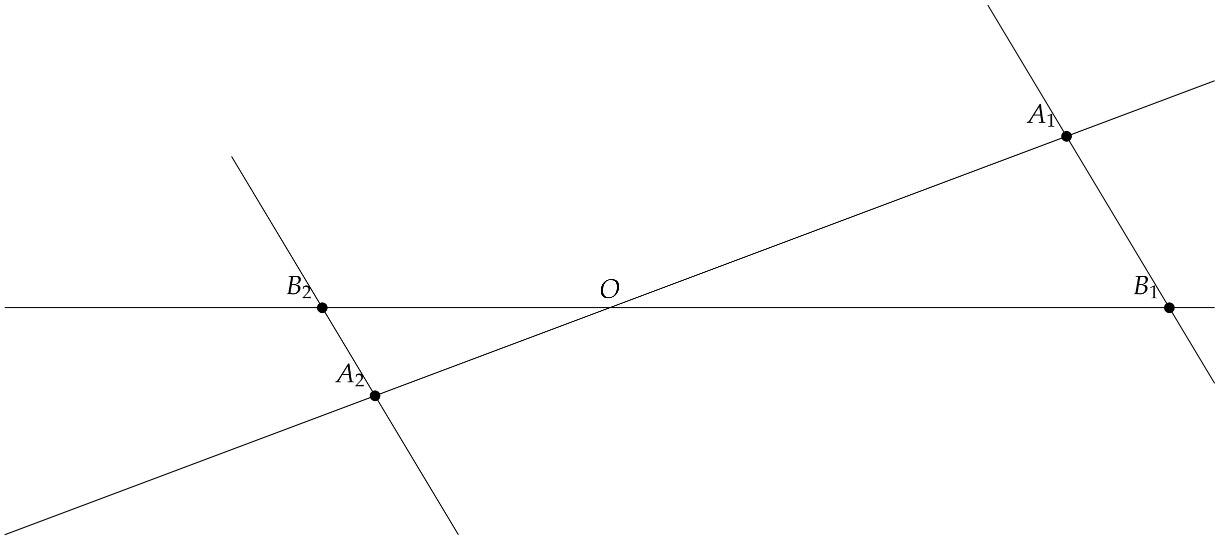
$$\frac{P_{OA_1B_1}}{P_{A_1B_1A_2}} = \frac{P_{OA_1B_1}}{P_{A_1B_1B_2}}.$$

Z powyższego wynika, że

$$\frac{|OA_1|}{|A_1A_2|} = \frac{|OB_1|}{|B_1B_2|},$$

co kończy dowód.

Uwaga 2. Twierdzenie Talesa pozostaje prawdziwe, jeśli przeciąć prostymi równoległymi ramiona kąta i ich przedłużenia.



Jeśli proste A_1B_1 i A_2B_2 są równoległe, to $\frac{|OA_1|}{|OA_2|} = \frac{|OB_1|}{|OB_2|}$ lub równoważnie $\frac{|OA_1|}{|A_1A_2|} = \frac{|OB_1|}{|B_1B_2|}$.

Zadanie 2. Dane są odcinki o długościach a, b i c. Skonstruować odcinek długości $x = \frac{\sqrt{2}a \cdot b}{3c}$. Przyjmujemy, że każdy z nich ma długość różną od zera.

Zadanie 3. Ramiona kąta płaskiego przecinają trzy proste równoległe, odcinając na jednym z ramion kąta, począwszy od wierzchołka kąta, odcinki o długościach kolejno $3, 5, 8$. Te same proste odcinają na drugim ramieniu kąta odcinki o długosciach kolejno x, y, z, gdzie $x + y = 24$. Wyznacz długości x, y, z.

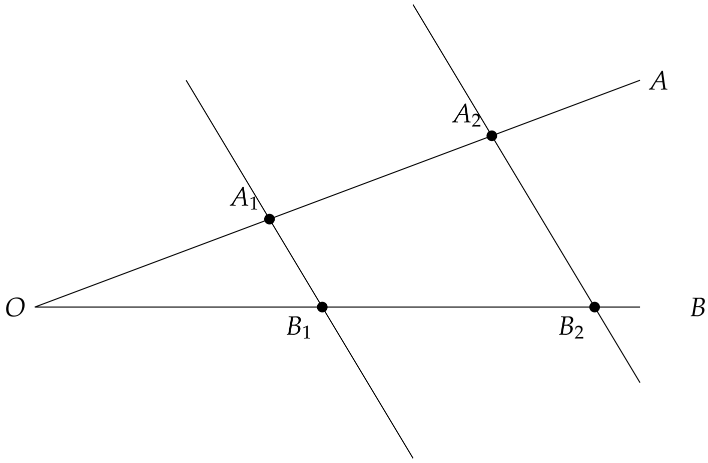
Zadanie 4. Udowodnij następujące wnioski z twierdzenia Talesa:
Jeżeli ramiona kąta płaskiego o wierzchołku O (Rysunek 1.) przetniemy prostymi równoległymi A_1B_1 i A_2B_2, to

$$\frac{|OA_2|}{|A_1A_2|} = \frac{|OB_2|}{|B_1B_2|} \tag{1}$$
$$\frac{|OA_1|}{|A_1B_1|} = \frac{|OA_2|}{|A_2B_2|} \tag{2}$$

Uwaga 3. Inny jeszcze wniosek z twierdzenia Talesa można znaleźć w zadaniu 10.

Zadanie 5. Sformułuj twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa.

Uwaga 4. (a) Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa nazywane jest czasami twierdzeniem o prostych równoległych.



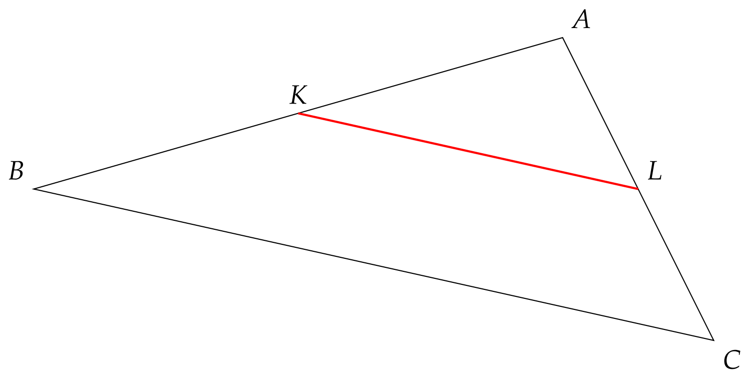
Rysunek 1.

(b) Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa jest prawdziwe, zatem zachodzi twierdzenie w postaci równoważności warunku proporcjonalności odpowiednich odcinków na ramionach kąta płaskiego i równoległości prostych przecinających ramiona kąta.

(c) Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa można udowodnić stosując metodę nie wprost i korzystając z twierdzenia Talesa (patrz zadanie 12).

(d) Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa nie jest w ogólności prawdziwe dla warunku (1). Warunek ten jest spełniony dla prostych równoległych (twierdzenie Talesa), ale nie tylko dla nich. Wystarczy wyjść od prostych równoległych i odbić punkt A_1 symetrycznie względem punktu A_2, otrzymując punkt E, dla którego równość (1) jest spełniona, choć proste B_2A_2 i EB_1 nie są już równoległe.

Zadanie 6. *Wniosek z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa*
Uzasadnij, że odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i równy jego połowie.



Zadanie 7. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie $|AB| = 10$ i ramionach długości $|AC| = |BC| = 13$ wpisano kwadrat $DEFG$. Bok DE kwadratu leży na boku AB trójkąta. Obliczyć

długość boku tego kwadratu.

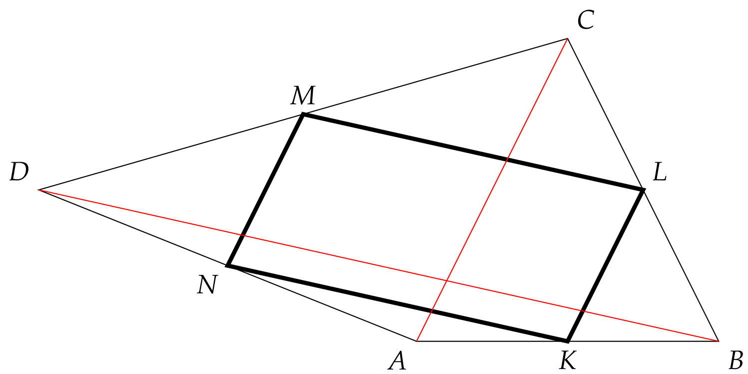
Zadanie 8. Dany odcinek AB podzielić konstrukcyjnie w stosunku $m : n$, gdzie m i n są liczbami naturalnymi.

Zadanie 9. Korzystając z twierdzenia Talesa udowodnij, że dwusieczna kąta wewnętrznego trójkąta dzieli bok przeciwległy temu kątowi proporcjonalnie do boków przyległych.

Zadanie 10. Udowodnij następujący wniosek z twierdzenia Talesa:
Jeżeli ramiona kąta płaskiego o wierzchołku O przetniemy prostymi równoległymi A_1B_1 i A_2B_2, to

$$\frac{|OA_1|}{|OA_2|} = \frac{|OB_1|}{|OB_2|} \tag{3}$$

Zadanie 11. Uzasadnij, że czworokąt, którego wierzchołkami są środki boków dowolnego czworokąta wypukłego, jest równoległobokiem. Dla jakich czworokątów środki jego boków są wierzchołkami kwadratu?



Uwaga 5. Powyższe twierdzenie o czworokącie wyznaczonym przez środki boków innego czworokąta zachodzi dla dowolnego czworokąta, niekoniecznie wypukłego.

Zadanie 12. Twierdzenie odwrotne do tw. Talesa:
Jeżeli odcinki wyznaczone przez dwie proste na jednym z ramion kąta płaskiego są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta, to proste te są równoległe.
Prześledzić poniższy dowód tego twierdzenia.
Dowód twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa przeprowadzony metodą nie wprost.
Niech dla punktów A_1 i B_1 oraz A_2 i B_2, wyznaczonych na ramionach kąta płaskiego AOB, odpowiednio przez proste k i l zachodzi równość

$$\frac{|OA_1|}{|A_1A_2|} = \frac{|OB_1|}{|B_1B_2|}. \tag{4}$$

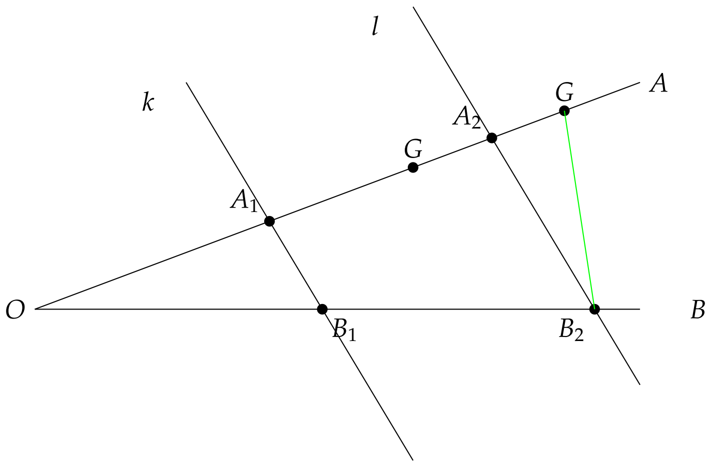
Dla dowodu nie wprost załóżmy, że prosta l nie jest równoległa do prostej k. Wówczas prosta przechodząca przez punkt B_2 i równoległa do prostej k, przecina ramię OA w punkcie G, $G \neq A_2$, zatem $|A_1A_2| \neq |A_1G|$. Z twierdzenia Talesa mamy natomiast

$$\frac{|OA_1|}{|A_1G|} = \frac{|OB_1|}{|B_1B_2|}.$$

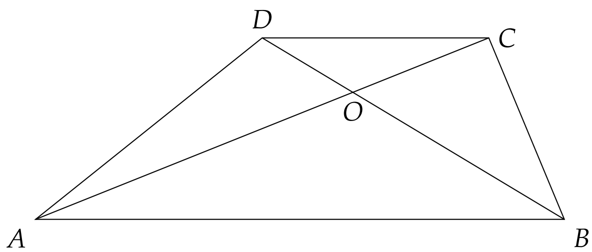
Ponieważ $|A_1A_2| \neq |A_1G|$, więc

$$\frac{|OA_1|}{|A_1A_2|} \neq \frac{|OB_1|}{|B_1B_2|},$$

co jest sprzeczne z założeniem (4). Zatem prosta l jest równoległa do prostej k.



Zadanie 13. Obliczyć stosunek pola trapezu $ABCD$ (odcinki AB i CD są równoległe) do pola trójkąta AOB, gdzie O jest punktem przecięcia przekątnych trapezu, jeżeli wiadomo, że podstawy trapezu mają długości $|AB| = a$ i $|CD| = b$.



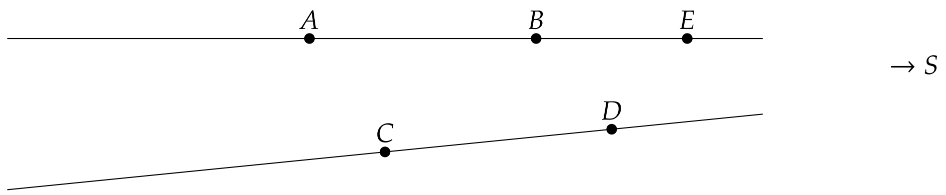
Zadania domowe

Zadanie 14. Dany odcinek AB podziel na 5 równych części.

Zadanie 15. Ramiona kąta płaskiego przecinają trzy proste równoległe, odcinając na jednym z ramion kąta począwszy od wierzchołka kąta odcinki o długościach kolejno $a, 9, 18$. Te same proste odcinają na drugim ramieniu kąta odcinki o długościach kolejno 8, 12, z. Wyznacz długości a i z.

Zadanie 16. W trójkącie ABC wysokość poprowadzona z wierzchołka A dzieli bok BC na odcinki BD i DC o długościach 7 i 5. Oblicz w jakim stosunku dzieli bok AB symetralna boku BC.

Zadanie 17. Proste AB i CD przecinają się "gdzieś daleko" w punkcie S (patrz rysunek). Przez punkt $E \neq A$ należący do prostej AB prowadzimy prostą równoległą do prostej AC, przecinającą prostą CD w punkcie F. Jak obliczyć odległość punktu A od punktu S? Które odcinki należy w tym celu zmierzyć?



Zadanie 18. Uzasadnij, że czworokąt, którego wierzchołkami są środki boków rombu jest prostokątem. Kiedy ten czworokąt będzie kwadratem ?

Zadanie 19. W prostokącie $ABCD$ o długościach boków $|AB| = 12$, $|AD| = 8$, połączono środki boków AB i BC oraz AD i CD otrzymując w ten sposób sześciokąt $AEFCGH$. Oblicz pole i obwód sześciokąta.

Literatura

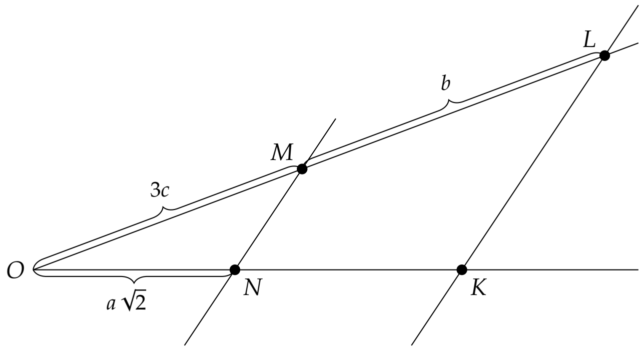
(a) K. Kłaczkow, M. Kurczab, E. Świda, Matematyka dla licealistów. Podręcznik do II klasy, Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro, Warszawa 2000,

(b) A. Zakrzewska, E. Stachowski, M. Szurek, I ty zostaniesz Pitagorasem. Podręcznik do matematyki do klasy drugiej liceum i technikum. Zakres rozszerzony i zakres podstawowy. Oficyna Wydawniczo-Poligraficzna "ADAM", Warszawa 2003,

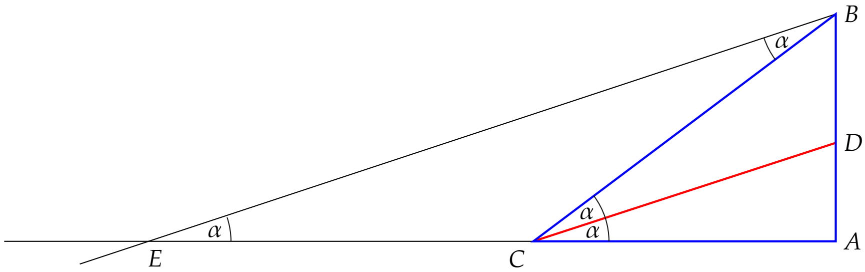
(c) D. i M. Zakrzewscy, Repetytorium z matematyki dla uczniów szkół średnich i kandydatów na studia. Wydawnictwo Szkolne PWN, Warszawa 2000.

Wskazówki

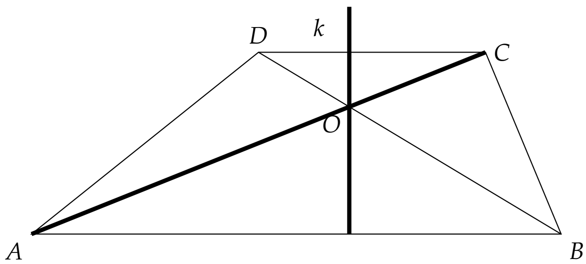
1. Trójkąty $A_1B_1A_2$ i $A_1B_1B_2$ mają równe pola - ich wysokości opuszczone na wspólną podstawę A_1B_1 są równe. Opisać pola tych trójkątów za pomocą wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków B_1, A_1. Szukane proporcje wynikają z porównania stosunku tych pól do pola trójkąta OA_1B_1. **2.** Skorzystać z twierdzenia 1. Dla konstrukcji odcinka o długości $a\sqrt{2}$ posłużyć się przekątną w kwadracie o boku długości a.



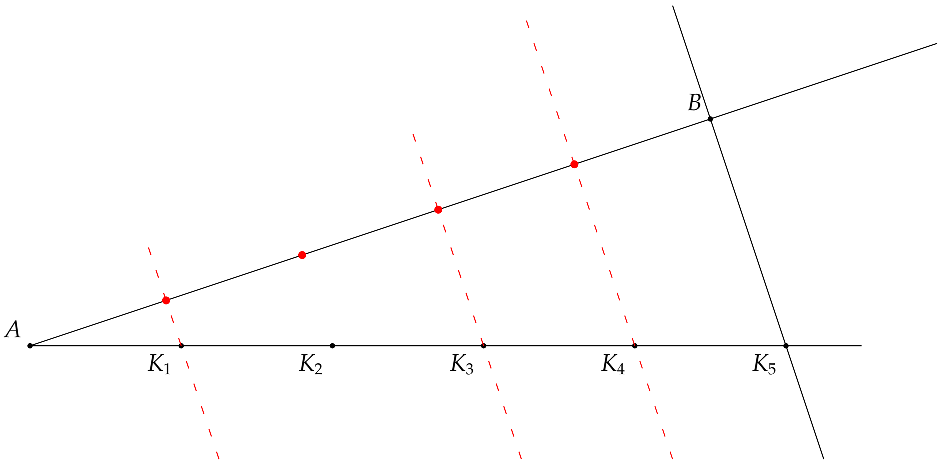
3. Skorzystać z twierdzenia 1. **4.** Aby wykazać warunek (1) wystarczy skorzystać z twierdzenia Talesa zastosowanego do kąta o wierzchołku O. Aby wykazać warunek (2) przez punkt A_1 poprowadzić prostą równoległą do prostej B_1B_2 i skorzystać z twierdzenia Talesa dla kąta o wierzchołku A_2. **5.** Jeśli twierdzenie ma postać implikacji $p \to q$, to twierdzenie odwrotne do niego ma postać $q \to p$. **6.** Skorzystać z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa (patrz zadanie 5) oraz z warunku (2). **7.** Zastosować twierdzenie Pitagorasa oraz twierdzenie 1. **8.** Skorzystać z twierdzenia 1 dla dowolnego kąta ostrego, na którego ramionach odłożyć odpowiednio odcinki AB i $(m+n)$ odcinków o równej, zadanej długości. Patrz też zadanie 2. **9.** Przez jeden z wierzchołków trójkąta, różny od C, poprowadzić prostą równoległą do dwusiecznej kąta C. Skorzystać z twierdzenia 1. Uwaga. Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie można też udowodnić, korzystając z twierdzenia sinusów (patrz materiały do rozdziału "Twierdzenie sinusów i cosinusów").



10. Patrz Rysunek 1. Zapisać proporcję (3) za pomocą długości odcinków występujących w tezie twierdzenia Talesa. **11.** Skorzystać z zadania 6 **13.** Przez punkt O poprowadzić prostą k zawierającą wysokość trapezu. Skorzystać z Uwagi 2 dla ramion kąta wyznaczonego przez prostą k i jedną z przekątnych trapezu.



14. Na drugim ramieniu kąta o wierzchołku A zaznaczyć 5 odcinków jednakowej długości, skorzystać z twierdzenia Talesa. Patrz też zadania 2, 3.



15. Skorzystać z proporcji z twierdzenia Talesa. **16.** Symetralna boku jest równoległa do wysokości spuszczonej na ten bok. Można zatem dalej skorzystać z twierdzenia Talesa. **17.** Skorzystać z warunku (2). **18.** Skorzystać z zadania 6 oraz z twierdzenia odwrotnego do tw. Talesa i własności przekątnych w rombie albo wprost z zadania 11. **19.** Skorzystać z zadania 6.

Odpowiedzi

2. $x = |NK|$ **3.** $x = 9$, $y = 15$, $z = 24$ **5.** Jeżeli odcinki wyznaczone przez dwie proste na jednym z ramion kąta płaskiego są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta, to proste te są równoległe. **7.** $|DE| = \frac{60}{11}$. **11.** Ten równoległobok jest kwadratem wtedy i tylko wtedy, gdy przekątne wyjściowego czworokąta przecinają się pod kątem prostym i mają równe długości. **13.** $\frac{P_{ABCD}}{P_{ABO}} = \left(\frac{a+b}{a}\right)^2$ **15.** $a = 6$, $z = 24$ **16.** $\frac{|BF|}{|FA|} = \frac{6}{1}$ **17.** $|AS| = \frac{|AC| \cdot |AE|}{|AC| - |EF|}$ **18.** Czworokąt ten będzie kwadratem dla rombu o przekątnych o równej długości, tzn. dla kwadratu. **19.** $P = 72$, $L = 20 + 4\sqrt{13}$