# Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

*Jerzy Rutkowski*

Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

## 2. Elementy kombinatoryki

### 2.1. Permutacje

## Teoria

**Definicja 1.** Niech $n \in \mathbb{N}$. Permutacją $n$-elementowego zbioru $A$ nazywamy dowolną funkcję różnowartościową $f : \{1, \ldots, n\} \to A$.

Innymi słowy: permutacją $n$-elementowego zbioru $A$ nazywamy dowolny $n$-elementowy ciąg różnych elementów zbioru $A$.

*Uwaga* 1. Zamiast mówić o permutacjach $n$-elementowego zbioru $\{a_1, \ldots, a_n\}$, mówimy też o permutacjach elementów $a_1, \ldots, a_n$.

**Przykład 1.** Wszystkimi permutacjami zbioru $A = \{a, b, c\}$ są ciągi

$$(a, b, c), \quad (a, c, b), \quad (b, a, c), \quad (b, c, a), \quad (c, a, b), \quad (c, b, a).$$

**Twierdzenie 1.** *Liczba wszystkich permutacji zbioru n-elementowego jest równa $n!$.*

Liczbę wszystkich permutacji zbioru $n$-elementowego oznacza się czasami przez $P_n$. Zgodnie z powyższym twierdzeniem zachodzi równość

$$P_n = n!. \tag{1}$$

## Zadania na zajęcia

**Zadanie 1.** Wypisać wszystkie permutacje liczb 1, 2 i 3.

**Zadanie 2.** Obliczyć liczbę różnych słów (sensownych lub nie), które można uzyskać w wyniku przestawiania liter w słowie sasanka.

**Zadanie 3.** Obliczyć liczbę takich permutacji liter $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ i $f$, których pierwszym wyrazem jest $c$.

**Zadanie 4.** Wypisać wszystkie permutacje liczb 1, 2, 3 i 4.

## Zadania domowe

**Zadanie 5.** Obliczyć liczbę takich permutacji liter $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ i $f$, które spełniają dany warunek:

a) trzy pierwsze wyrazy tworzą zbiór $\{b, c, d\}$;

b) samogłoski $a$ i $e$ są sąsiednimi wyrazami permutacji.

### 2.2. Kombinacje (bez powtórzeń)

## Teoria

**Definicja 2.** Niech $k, n \in \mathbb{N}$ i niech $k \leqslant n$. $k$-elementową kombinacją $n$-elementowego zbioru $A$ nazywamy dowolny $k$-elementowy podzbiór zbioru $A$.

**Przykład 2.** Wszystkimi 2-elementowymi kombinacjami zbioru $A = \{a, b, c, d\}$ są podzbiory:

$$\{a, b\}, \quad \{a, c\}, \quad \{a, d\}, \quad \{b, c\}, \quad \{b, d\}, \quad \{c, d\}.$$

**Twierdzenie 2.** *Liczba k-elementowych kombinacji n-elementowego zbioru A jest równa* $\binom{n}{k}$.

Liczbę wszystkich $k$-elementowych kombinacji zbioru $n$-elementowego oznacza się często przez $C_n^k$. Zgodnie z powyższym twierdzeniem zachodzi równość

$$C_n^k = \binom{n}{k}. \tag{2}$$

## Zadania na zajęcia

**Zadanie 6.** Obliczyć liczbę sposobów skreślenia kuponu w totolotku.

**Zadanie 7.** Obliczyć liczbę możliwych rozdań przy grze w brydża.

**Zadanie 8.** W klasie jest 15 dziewcząt i 13 chłopców. Obliczyć, na ile sposobów można skompletowć liczącą dwie dziewczynki i jednego chłopca delegację tej klasy.

## Zadania domowe

**Zadanie 9.** W klasie jest 16 dziewcząt i 12 chłopców. Obliczyć, na ile sposobów można skompletowć liczącą trzy dziewczynki i dwóch chłopców delegację tej klasy.

**Zadanie 10.** Do dyspozycji $n$ osób grających w tysiąca było $k$ talii kart, przy czym $3k \leqslant n$. Obliczyć liczbę $N$ sposobów wyboru $k$ ponumerowanych zbiorów trójek osób, które będą mogły grać tymi kartami. *Uwaga.* W tysiąca jedną talią grają trzy osoby.

### 2.3. Wariacje bez powtórzeń

## Teoria

**Definicja 3.** Niech $k, n \in \mathbb{N}$ i niech $k \leqslant n$. $k$-elementową wariacją bez powtórzeń $n$-elementowego zbioru $A$ nazywamy dowolną funkcję różnowartościową $f : \{1, \ldots, k\} \to A$.

Innymi słowy: $k$-elementową wariacją bez powtórzeń $n$-elementowego zbioru $A$ nazywamy dowolny $k$-wyrazowy ciąg różnych elementów zbioru $A$.

**Twierdzenie 3.** *Liczba k-elementowych wariacji bez powtrzeń n-elementowego zbioru A jest równa* $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Liczbę wszystkich $k$-elementowych wariacji bez powtrzeń zbioru $n$-elementowego oznacza się często przez $V_n^k$. Zgodnie z powyższym twierdzeniem zachodzi równość

$$V_n^k = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1). \tag{3}$$

## Zadania na zajęcia

**Zadanie 11.** Obliczyć liczbę różnych flag utworzonych przez trzy poziome różnokolorowe pasy, których kolory można wybrać spośród 6-ciu kolorów.

**Zadanie 12.** Obliczyć liczbę sposobów takiego posadzenia pięciu pań i trzech panów na ośmiu ponumerowanych miejscach przy okrągłym stole, by żadnych dwóch panów nie siedziało obok siebie.

**Zadanie 13.** Obliczyć, ile jest liczb pięciocyfrowych o cyfrach parami różnych.

## Zadania domowe

**Zadanie 14.** Niech liczby naturalne $k, m$ spełniają warunek $k \geqslant m$. Obliczyć liczbę sposobów takiego posadzenia $k$ kobiet i $m$ mężczyzn na $k+m$ miejscach przy okrągłym stole, by żadnych dwóch panów nie siedziało obok siebie.

**Zadanie 15.** Obliczyć liczbę sposobów rozdzielenia trzech medali (złotego, srebrnego i brązowego) pomiędzy sześciu zawodników.

### 2.4. Wariacje z powtórzeniami

**Twierdzenie 4.** *Niech $A$ będzie dowolnym zbiorem niepustym. Każdą funkcję $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to A$ nazywamy $k$-wyrazową wariacją z powtórzeniami elementów zbioru $A$.*

Z powyższej definicji wynika, że $k$-wyrazowe wariacje z powtórzeniami elementów zbioru $A$ to po prostu $k$-wyrazowe ciągi elementów zbioru $A$.

**Twierdzenie 5.** *Niech zbiory $A$ i $B$ mają odpowiednio $m$ i $n$ elementów. Liczba wszystkich funkcji $f : A \to B$ jest równa $n^m$.*

## Zadania na zajęcia

**Zadanie 16.** Na parterze dziesięciopiętrowego domu do windy wsiadło 8 osób. Obliczyć liczbę sposobów, na jakie osoby te mogą wysiąść z windy (pod uwagę bierzemy tu jedynie numery pięter, na których wysiadają poszczególne osoby).

**Zadanie 17.** Obliczyć liczbę takich numerów tablic rejestracyjnych, które na początku mają dowolne trzy duże litery alfabetu łacińskiego (alfabet ten ma 26 liter), a następnie dowolne cztery cyfry.

**Zadanie 18.** Obliczyć liczbę sposobób takiego rozmieszczenia dziewięciu kul ponumerowanych liczbami od 1 do 9 w trzech pudełkach ponumerowanych liczbami od 1 do 3, by spełniony był warunek:

a) pudełko nr 1 jest puste;

b) kula nr 1 jest w pudełku nr 1;

c) w pudełku nr 1 jest dokładnie jedna kula;

d) w pudełku nr 1 jest przynajmniej jedna kula;

e) w pudełku nr 1 jest co najwyżej jedna kula.

**Zadanie 19.** Obliczyć liczbę sposobów takiego rozmieszczenia ośmiu ponumerowanych kul w pięciu ponumerowanych pudełkach, by liczba pustych pudełek była równa:

a) 4; b) 3; c) 2;

## Zadania domowe

**Zadanie 20.** Obliczyć liczbę sposobów rozmieszczenia siedmiu ponumerowanych kul w czterech ponumerowanych pudełkach.

**Zadanie 21.** Obliczyć, ile jest liczb siedmiocyfrowych oraz ile spośród nich dzieli się przez 10.

**Zadanie 22.** Na każde z dziesięciu pytań pewnego testu można dać jedną z czterech odpowiedzi a, b, c i d. Obliczyć liczbę sposobów takiego wypełnienia tego testu, by odpowiedzi na dowolne dwa kolejne pytania były różne.

### 2.5. Zadania różne

## Zadania domowe

**Zadanie 23.** Obliczyć, na ile sposobów można z dziesięciu pań i dziesięciu panów utworzyć 10 nienumerowanych par tanecznych.

**Zadanie 24.** Obliczyć, na ile sposobów można z dziesięciu pań i dziesięciu panów utworzyć 10 ponumerowanych par tanecznych.

**Zadanie 25.** Obliczyć, na ile sposobów można z dziesięciu pań i trzynastu panów utworzyć 10 nienumerowanych par tanecznych.

**Zadanie 26.** Obliczyć, na ile sposobów można z dziesięciu pań i trzynastu panów utworzyć 10 ponumerowanych par tanecznych.

# 3. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

## Teoria

Klasyczną definicję prawdopodobieństwa podał w roku 1812 Pierre Simon de Laplace.

**Definicja 4.** Niech $\Omega$ będzie $N$-elementowym zbiorem zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych. Wówczas prawdopodobieństwo $\mathrm{P}(A)$ dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ wyraża się wzorem

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n}{N}, \tag{4}$$

gdzie $n$ jest liczbą zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A$.

**Twierdzenie 6.** *Niech $\Omega$ będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych. Dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$ zachodzi równość*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{5}$$

*Uwaga* 2. Przy obliczaniu prawdopodobieństwa zazwyczaj fundamentalną sprawą jest ustalenie, czy jako zdarzenia elementarne należy rozpatrywać ciągi elementów (permutacje, wariacje), czy zbiory elementów (kombinacje bez powtórzeń).

## Zadania na zajęcia

**Zadanie 27.** Rzucono dwa razy kostką do gry. Przyjmijmy następujące oznaczenia zdarzeń:

$A$ – suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 8,

$B$ – iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest równy 12.

Obliczyć: $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ i $P(A \cup B)$.

**Zadanie 28.** Przyjmijmy następujące oznaczenia zdarzeń:

$A$ – brydżysta otrzymał w rozdaniu dokładnie 5 pików,

$B$ – brydżysta otrzymał w rozdaniu dokładnie 2 asy.
Obliczyć:
a) $P(A)$; b) $P(B)$; c) $P(A \cap B)$; d) $P(A \cup B)$.

**Zadanie 29.** Dla każdego $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ obliczyć prawdopodobieństwo $p_k$ otrzymania przez brydżystę dokładnie $k$ asów w rozdaniu. Wyniki przedstawić w postaci ułamków zwykłych i ułamków dziesiętnych.

**Zadanie 30.** Z urny zawierającej 8 kul białych i 7 czerwonych wylosowano bez zwracania dwie kule. Obliczyć prawdopodobieństwo podanego zdarzenia. Wśród poniższych zdarzeń wskazać zdarzenia przeciwne i zdarzenia równe.
a) obie wylosowane kule są białe;
b) obie wylosowane kule są czerwone;
c) obie wylosowane kule są tego samego koloru;
d) obie wylosowane kule są różnych kolorów;
e) dokładnie jedna wylosowana kula jest biała;
f) dokładnie jedna wylosowana kula jest czerwona.

**Zadanie 31.** Na $2n$ miejscach przy okrągłym stole losowo posadzono $n$ kobiet i $n$ mężczyzn. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że na żadnych dwóch sąsiadujących ze sobą miejscach nie usiadły osoby tej samej płci.

**Zadanie 32.** Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że karty otrzymane w rozdaniu przez brydżystę będą miały rozkład 4-3-3-3 (tzn. 4 karty będą w jednym z kolorów, a w każdym z trzech pozostałych kolorów będą po 3 karty).

**Zadanie 33.** Na parterze 10-piętrowego budynku do windy wsiadło 6 osób. Obliczyć prawdopodobieństwo danego zdarzenia, przyjmując, że dla każdej z tych sześciu osób losowy jest numer piętra, na którym ta osoba wysiądzie:
a) żadne dwie osoby nie wysiądą na tym samym piętrze;
b) każda osoba wysiądzie na piętrze o numerze parzystym;
c) każda z osób wysiądzie przynajmniej na trzecim piętrze.

## Zadania domowe

**Zadanie 34.** Rzucamy jeden raz kostką do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo danego zdarzenia:
a) wypadnie szóstka;
b) wypadnie parzysta liczba oczek;
c) wypadnie liczba oczek większa od 2;
d) wypadnie liczba oczek będąca liczbą pierwszą;
e) wypadnie liczba oczek będąca liczbą złożoną.

**Zadanie 35.** Spośród liczb 1, 2, ..., 40 wybrano losowo jedną liczbę. Przyjmijmy następujące oznaczenia zdarzeń:
$A$ – wylosowana liczba dzieli się przez 5,
$B$ – wylosowana liczba dzieli się przez 3.
Obliczyć:
a) $P(A)$; b) $P(B)$; c) $P(A \cap B)$; d) $P(A \cup B)$.

**Zadanie 36.** Rzucono dwa razy kostką do gry. Przyjmijmy następujące oznaczenia zdarzeń:
$A$ – suma liczb wyrzuconych oczek jest liczbą parzystą,
$B$ – iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest liczbą parzystą,
$C$ – suma liczb wyrzuconych oczek jest większa od 7,
$D$ – iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest większy od 7,
$S$ – liczby wyrzuconych oczek są dzielnikami liczby 6,

$T$ – liczba oczek wyrzuconych za pierwszym razem jest mniejsza niż wyrzuconych za drugim razem.

Obliczyć:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $P(A)$; | b) $P(B)$; | c) $P(C)$; | d) $P(D)$; |
| e) $P(S)$; | f) $P(T)$; | g) $P(A \cap B)$; | h) $P(A \cap C)$; |
| i) $P(A \cap D)$; | j) $P(A \cap S)$; | k) $P(A \cap T)$; | l) $P(B \cap C)$; |
| ł) $P(B \cap D)$; | m) $P(B \cap S)$; | n) $P(B \cap T)$; | o) $P(C \cap D)$; |
| p) $P(C \cap S)$; | q) $P(C \cap T)$; | r) $P(D \cap S)$; | s) $P(D \cap T)$; |
| t) $P(S \cap T)$. | | | |

**Zadanie 37.** Przy oznaczeniach z zadania 36 i korzystając z wyników zadania 36, obliczyć:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $P(A \cup B)$; | b) $P(A \cup C)$; | c) $P(A \cup D)$; | d) $P(A \cup S)$; |
| e) $P(A \cup T)$; | f) $P(B \cup C)$; | g) $P(B \cup D)$; | h) $P(B \cup S)$; |
| i) $P(B \cup T)$; | j) $P(C \cup D)$; | k) $P(C \cup S)$; | l) $P(C \cup T)$; |
| ł) $P(D \cup S)$; | m) $P(D \cup T)$; | n) $P(S \cup T)$. | |

**Zadanie 38.** Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że brydżysta otrzyma w rozdaniu dokładnie

a) dwa asy i jednego króla;

b) trzy asy i cztery króle

c) trzy asy i dwa króle i jedną damę;

d) dwa asy, trzy króle i cztery damy;

e) jednego asa, trzy króle i trzy damy;

f) jednego asa, dwa króle, cztery damy i trzy walety.

**Zadanie 39.** Obliczyć prawdopodobieńwstwo zdarzenia, że przy rzucie dwiema kostkami do gry suma liczb wyrzuconych oczek jest większa od ich iloczynu.

## 4. Rozszerzenie zakresu pojęcia prawdopodobieństwa

### Teoria

Umowa. Rodzinę wszystkich podzbiorów dowolnego zbioru $X$ oznaczamy przez $\mathcal{P}(X)$ (często używa się też oznaczenia $2^X$).

Niech $\Omega$ będzie dowolnym niepustym zbiorem skończonym. Prawdopodobieństwem na przestrzeni $\Omega$ jest dowolna funkcja $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ spełniająca warunki:

($P_1$) $\bigwedge_{A\subset\Omega} P(A) \geqslant 0,$

($P_2$) $\bigwedge_{A,B\subset\Omega} \big(A \cap B = \emptyset \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)\big),$

($P_3$) $P(\Omega) = 1.$

Elementy zbioru $\Omega$ nazywamy zdarzeniami elementarnymi, a podzbiory zbioru $\Omega$ nazywamy zdarzeniami. Wynika stąd, że każde zdarzenie jest zbiorem zdarzeń elementarnych.

**Twierdzenie 7.** *Niech $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ będzie dowolnym zbiorem n-elementowym i niech funkcja $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ spełnia warunki:*

*(P 1)* $P(\emptyset) = 0,$

*(P 2)* $\bigwedge_{k\in\{1,\dots,n\}} P(\{\omega_k\}) \geqslant 0,$

*(P 3)* $\sum_{k=1}^{n} P(\{\omega_k\}) = 1.$

*(P 4) dla każdego m-elementowego podzbioru* $A = \{\omega_{i_1}, \ldots \omega_{i_m}\}$ *zbioru* $\Omega$ *zachodzi równość*

$$P(A) = \sum_{r=1}^{m} P(\{\omega_{i_r}\}) \tag{6}$$

*Wtedy funkcja P jest prawdopodobieństwem.*

## Zadania na zajęcia

**Zadanie 40.** Na każdej ściance dwunastościanu foremnego zaznaczono pewną liczbę oczek. Liczby ścianek z podanymi liczbami oczek przedstawia poniższa tabela:

| liczba oczek | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| liczba ścianek | 1 | 1 | 3 | 4 | 1 | 2 |

Rzucamy jeden raz rozpatrywaną bryłą. Niech $A_k$ dla $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ oznacza zdarzenie polegające na wyrzuceniu $k$ oczek. Uzupełnić poniższą tabelę:

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(A_k)$ | $\frac{1}{12}$ | | | | | $\frac{2}{12}$ |
| $P(A_k)$ | $\frac{1}{12}$ | | | | | $\frac{1}{6}$ |

Korzystając z tej tabeli, obliczyć prawdopodobieństwo danego zdarzenia:
$A$ – wypadnie parzysta liczba oczek;
$B$ – wypadnie nieparzysta liczba oczek;
$C$ – wypadnie liczba oczek większa od 2;
$D$ – wypadnie liczba oczek będąca liczbą pierwszą;
$S$ – wypadnie liczba oczek będąca liczbą złożoną;
$T$ – wypadnie nieparzysta liczba oczek większa od 2.

**Zadanie 41.** Niech $\Omega$ będzie dowolnym niepustym zbiorem skończonym i niech $P$ będzie prawdopodobieństwem określonym na przestrzeni $\Omega$. Korzystając z warunków (P 1)-(P 3), wykazać poniższy związek:

a) $P(\emptyset) = 0$;

b) jeżeli $A \subset B \subset \Omega$, to $P(A) \leqslant P(B)$;

c) jeśli $A \subset \Omega$, to $P(A) \leqslant 1$;

d) jeśli $A \subset \Omega$, to $P(A') = 1 - P(A)$;

e) dla dowolnych $A, B \subset \Omega$ zachodzi równość $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

**Zadanie 42.** Zdarzenia $A, B \subset \Omega$ spełniają warunki: $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A') = \frac{1}{3}$ i $P(B) = \frac{1}{2}$. Obliczyć $P(A \cup B)$.

**Zadanie 43.** Na jednej ściance kostki sześciennej zaznaczono jedno oczko, na dwóch zaznaczono po dwa oczka, a na trzech zaznaczono po trzy oczka. Niech $\omega_k$ dla $k = 1, 2, 3$ oznacza zdarzenie, że przy rzucie taką kostką wypadło $k$ oczek. Uzupełnić poniższą tabelkę

| $k$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(\{\omega_k\})$ | $\frac{1}{6}$ | | |

Przyjmijmy, że $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ jest przestrzenią zdarzeń elementarnych. Wypisać wszystkie zdarzenia będące podzbiorami przestrzeni $\Omega$ oraz obliczyć ich prawdopodobieństwa.

**Zadanie 44.** Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych i niech zachodzą równości:

$$P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{8}, \quad P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{8}, \quad P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{4}, \quad P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{2}.$$

Obliczyć prawdopodobieństwo danego zdarzenia:

a) $A = \{\omega_1, \omega_2\}$; b) $B = \{\omega_2, \omega_4\}$; c) $C = \{\omega_3, \omega_4\}$;

d) $D = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$; e) $K = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$; f) $L = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}$.

**Zadanie 45.** Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{10}\}$ będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych przy czym $P(\{\omega_k\}) = \frac{1}{10}$ dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) $A = \{\omega_1, \omega_2\}$; b) $B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_7\}$; c) $C = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_8, \omega_{10}\}$.

**Zadanie 46.** Wykazać, że dla dowolnych $A, B \subset \Omega$ zachodzi równość $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$. Wywnioskować stąd, że jeśli ponadto $A \subset B$, to $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

**Zadanie 47.** Zdarzenia $A, B \subset \Omega$ spełniają warunki $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ i $P(A \cup B) = 0,8$. Obliczyć:

a) $P(A \cap B)$; b) $P(A \setminus B)$; c) $P(A' \cap B)$.

## Zadania domowe

**Zadanie 48.** Wykazać, że dla dowolnych zdarzeń $A, B, C \subset \Omega$ zachodzi równość

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \end{aligned} \tag{7}$$

**Zadanie 49.** Sprawdzić, czy zdarzenia $A, B \subset \Omega$ spełniające warunki $P(A) = \frac{1}{2}$ i $P(B) = \frac{2}{3}$ mogą się wykluczać.

**Zadanie 50.** Zdarzenia $A, B \subset \Omega$ spełniają warunki $P(A') = 0,6$, $P(B') = 0,7$ i $P(A \cap B) = 0,2$. Obliczyć $P(A \cup B)$.

# 5. Prawdopodobieństwo warunkowe

## Teoria

**Definicja 5.** Niech $\Omega$ będzie przestrzenią zdarzeń i niech zdarzenie $B \subset \Omega$ spełnia warunek $P(B) > 0$. Prawdopodobieństwem zdarzenia $A \subset \Omega$ pod warunkiem, że zaszło zdarzenie $B$ nazywamy liczbę $P(A|B)$ (czytaj: P od $A$ pod warunkiem $B$) określoną wzorem

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{8}$$

## Zadania na zajęcia

**Zadanie 51.** Obliczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia przynajmniej jednej szóstki przy dwóch rzutach kostką do gry pod warunkiem, że suma wyrzuconych liczb oczek jest większa od 8.

## Zadania domowe

**Zadanie 52.** Rzucamy jeden raz dwiema kostkami do gry. Przyjmijmy następujące oznaczenia zdarzeń:
$A$ – suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 7,
$B$ – iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest równy 6.
Obliczyć $\mathrm{P}(A|B)$ i $\mathrm{P}(B|A)$.

**Zadanie 53.** Z urny zawierającej 6 kul białych i 4 kule czarne wylosowano bez zwracania najpierw jedną, a potem drugą kulę. Wprowadźmy oznaczenia zdarzeń:
$A$ – pierwsza kula była biała;
$B$ – druga kula była biała.
Obliczyć:
a) $\mathrm{P}(B|A)$;  b) $\mathrm{P}(B'|A)$;  c) $\mathrm{P}(A|B)$;  d) $\mathrm{P}(A'|B)$.

## 6. Prawdopodobieństwo całkowite

### Teoria

Poniższe twierdzenie nosi nazwę twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

**Twierdzenie 8.** *Niech $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$, gdzie $P(B_i) > 0$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ oraz $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ takich, że $i \neq j$. Wówczas zachodzi równość*

$$P(A) = P(A|B_1)\,P(B_1) + P(A|B_2)\,P(B_2) + \ldots + P(A|B_n)\,P(B_n). \tag{9}$$

Równość (9) nazywamy wzorem na prawdopodobieństwo całkowite. Można ją zapisać również w postaci

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\,P(B_i). \tag{10}$$

### Zadania na zajęcia

**Zadanie 54.** Detale z fabryk $\mathrm{F}_1$, $\mathrm{F}_2$, $\mathrm{F}_3$ stanowią odpowiednio 45%, 35% i 20% zawartości magazynu. Wśród detali z tych fabryk jest 1%, 3% i 2,5% braków odpowiednio. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowany z magazynu detal jest wybrakowany.

**Zadanie 55.** Zawartość urn I, II i III przedstawia tabela

| | I | II | III |
|---|---|---|---|
| kule białe | 4 | 5 | 5 |
| kule czarne | 8 | 7 | 5 |

Rzucamy kostką do gry. Jeśli wypadnie jedno oczko, to losujemy kulę z urny I, jeśli wypadną 2 lub 3 oczka, to losujemy kulę z urny II, a jeśli wypadną przynajmniej 4 oczka, to kulę losujemy z urny III. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy kulę białą.

### Zadania domowe

**Zadanie 56.** W pewnej uczelni 78% studentek i 88% studentów umie pływać. Studentki stanowią 60% studiujących w tej uczelni. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrana osoba studiująca w tej uczelni umie pływać.

**Zadanie 57.** Z zawierającej 3 kule białe i 5 kul czarnych pierwszej urny wylosowano kulę i włożono ją do zawierającej 4 kule białe i 9 kul czarnych urny drugiej. Następnie z drugiej urny wylosowano jedną kulę. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że kula ta jest biała.

# Literatura


$1^o$. Gerstenkorn T., Śródka T. – „Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa", PWN, 1974

$2^o$. Krysicki W. i inni – „Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach", PWN, 2007

$3^o$. Krzyśko M. – „Wykłady z teorii prawdopodobieństwa", Wydawnictwo UAM, 1997

$4^o$. Słowikowski S. - „Zbiór zadań z rachunku prawdopodobieństwa dla szkół średnich", WSiP, 1980

$5^o$. Stojanow J. i inni – „Zbiór zadań z rachunku prawdopodobieństwa", PWN, 1991


# Odpowiedzi

**5.** a) 36; b) 240. **9.** 36950. **10.** $N = \binom{n}{3}\binom{n-3}{3}\cdot\ldots\cdot\binom{n-3k+3}{3} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-3k+1)}{6^k} = \frac{n!}{6^k(n-3k)!}$.
**13.** 27 216. **14.** Rozumując tak jak w rozwiązaniu zadania 12, wnioskujemy, że szukana liczba jest równa $(k+m)\cdot(k-1)!\cdot k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-m+1)$. **15.** 120. **17.** 175 760 000. **18.** a) $2^9$ (= 512); b) $1\cdot 3^8$ (= 6561); c) $9\cdot 2^8$ (= 2304); d) $3^9-2^9$ (= 19 171); e) $9\cdot 2^8+2^9$ (= 2816). **19.** a) $\binom{5}{1}$ (= 5); b) $\binom{5}{2}(2^8-2)$ (= 2540); c) $\binom{5}{3}[3^8-3(2^8-2)-3]$ (= 57 960). **20.** $4^7$ (= 16 384). **21.** $9\cdot 10^6$ (= 9 000 000) oraz $9\cdot 10^5$ (= 900 000). **22.** $4\cdot 3^9$ (= 78 732). **23.** 10! (= 3 628 800). **24.** $(10!)^2$ (= 13 168 189 440 000). **25.** $\binom{13}{3}10!$ ($= 13\cdot 12\cdot\ldots\cdot 5\cdot 4 = 1\,037\,836\,800$). **26.** $\binom{13}{3}(10!)^2$ (= 3 766 102 179 840 000).
**30.** a) $\frac{4}{15}$; b) $\frac{1}{5}$; c) $\frac{7}{15}$; d) $\frac{8}{15}$; e) $\frac{8}{15}$; f) $\frac{8}{15}$. *Uwaga.* Zdarzenia z podpunktów c) i d) są przeciwne, a zdarzenia z podpunktów d), e) i f) są równe. **33.** a) 0.1512; b) $\frac{1}{64}$ (≈ 0.0156); c) $\frac{4^6}{5^6}$ (≈ 0.262). **34.** a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{1}{3}$. **35.** a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{13}{40}$; c) $\frac{1}{20}$, d) $\frac{19}{40}$. **36.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{5}{12}$; d) $\frac{11}{18}$; e) $\frac{4}{9}$; f) $\frac{5}{12}$; g) $\frac{1}{4}$; h) $\frac{1}{4}$; i) $\frac{1}{3}$; j) $\frac{2}{9}$; k) $\frac{1}{6}$;
l) $\frac{1}{3}$; ł) $\frac{1}{2}$; m) $\frac{1}{3}$; n) $\frac{1}{3}$; o) $\frac{5}{12}$; p) $\frac{5}{36}$; q) $\frac{1}{6}$; r) $\frac{1}{6}$; s) $\frac{1}{4}$; t) $\frac{1}{6}$. **37.** a) 1; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{7}{9}$; d) $\frac{13}{18}$; e) $\frac{3}{4}$; f) $\frac{5}{6}$; g) $\frac{31}{36}$; h) $\frac{31}{36}$; i) $\frac{5}{6}$; j) $\frac{11}{18}$; k) $\frac{13}{18}$; l) $\frac{2}{3}$; ł) $\frac{8}{9}$; m) $\frac{7}{9}$; n) $\frac{25}{36}$. **38.** a) $\frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{44}{10}}{\binom{52}{13}}$; b) $\frac{\binom{4}{3}\binom{4}{4}\binom{44}{6}}{\binom{52}{13}}$; c) $\frac{\binom{4}{3}\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{40}{7}}{\binom{52}{13}}$;

d) $\frac{\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}\binom{40}{4}}{\binom{52}{13}}$; e) $\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{3}^2\binom{40}{6}}{\binom{52}{13}}$; f) $\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{4}\binom{4}{3}\binom{36}{3}}{\binom{52}{13}}$. **39.** $\frac{11}{36}$. **42.** $\frac{11}{12}$. **43.**

| $k$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(\{\omega_k\})$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |

,

| $A$ | $\emptyset$ | $\{\omega_1\}$ | $\{\omega_2\}$ | $\{\omega_3\}$ | $\{\omega_1,\omega_2\}$ | $\{\omega_1,\omega_3\}$ | $\{\omega_2,\omega_3\}$ | $\Omega$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(A)$ | 0 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{5}{6}$ | 1 |

. **44.** a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{5}{8}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{7}{8}$; f) $\frac{3}{4}$.
**45.** a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{1}{2}$. **47.** a) 0, 3; b) 0, 3; c) 0, 2. **48.** Korzystając z praw rachunku zbiorów i z własności (**??**), otrzymujemy równości:

$$\begin{aligned}
&P(A\cup B\cup C)\\
&= P((A\cup B)\cup C)\\
&= P(A\cup B)+P(C)-P((A\cup B)\cap C)\\
&= P(A)+P(B)-P(A\cap B)+P(C)-P((A\cap C)\cup(B\cap C))\\
&= P(A)+P(B)-P(A\cap B)+P(C)-[P((A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)]\\
&= P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C).
\end{aligned}$$

**49.** Nie. **50.** 0, 5. **52.** P$(A|B)=\frac{1}{2}$ i P$(B|A)=\frac{1}{3}$. **53.** a) $\frac{5}{9}$; b) $\frac{4}{9}$; c) $\frac{5}{9}$; d) $\frac{4}{9}$. **56.** $\frac{41}{50}$. **57.** $\frac{5}{16}$.